PROPAGANDA DE INSTRUCÇÃO
PARA
Portuguezes e Brazileiros

BIBLIOTHECA DO POVO
E DAS ESCOLAS

CADA VOLUME 50 RÉIS

# GEOMETRIA PLANA

ILLUSTRADA COM 73 GRAVURAS

E accommodada ao ensino dos que frequentam o
Curso Geral dos Lyceus
ao quaesquer aulas de mathematica elementar

Segunda edição

PRIMEIRO ANNO — TERCEIRA SERIE

CADA VOLUME 50 REIS

Cada volume abrange 64 paginas, de composição cheia, edição estereotypada, — e fórma um tratado elementar completo n'algum ramo de sciencias, artes ou industrias, um florilegio litterario, ou um aggregado de conhecimentos uteis e indispensaveis, expostos por fórma succinta e concisa, mas clara, despretenciosa, popular, ao alcance de todas as intelligencias.

1883
DAVID CORAZZI, EDITOR
EMPREZA HORAS ROMANTICAS
Premiada com medalha de ouro na Exposição do Rio de Janeiro
Administração: 40, R. da Atalaya, 52, Lisboa
*Filial no Brazil: 40, R. da Quitanda, Rio de Janeiro*

NUMERO
21

# INDICE



---

## ERRATAS MAIS IMPORTANTES

| Pag. | Linha | Onde se lê | Leia-se |
|---|---|---|---|
| 14 | 35 | $O E$ | $O G$ |
| 15 | 3 | $E G C$ | $E G B$ |
| 28 | ultima | $D' C$ | $D' C'$ |
| 29 | 1 | parallela a esta recta $D' F'$ | recta $D' F'$ parallela a $B' C'$ |
| 33 | 17 | $D' C A'$ | $B' C' A'$ |
| 36 | 7 | $\frac{2 - r \times (n - 2)}{n}$ | $\frac{2 r \times (n - 2)}{n}$ |
| 41 | 29 | (a) | (b) |

# GEOMETRIA PLANA

---

> A geometria está para todos os conhecimentos physicos, como a Logica para todos os intellectuaes e moraes. E, alêm d'isso, nenhum estudo exercita, fórma, rectifica a razão como este.
> GARRETT — *Da Educação.*

A origem da Geometria, como de muitas outras sciencias, perde-se na noite dos tempos.

Sem intrarmos no estudo circumstanciado dos progressos successivos d'este ramo dos conhecimentos humanos, isto é, sem fazermos a sua historia, apontando as revoluções operadas em tão vasta quanto bella sciencia, poderemos rapidamente indicar os periodos ou epochas mais notaveis da sua historia pelos nomes d'esses trabalhadores, que rompendo successivamente novos caminhos, que amontoando pouco a pouco o material, foram os sublimes obreiros que mais concorreram para o desinvolvimento d'esta parte das sciencias mathematicas.

Aos Egypcios não eram desconhecidas algumas noções de geometria, porêm, eram ellas tão vagas, tão pouco definidas, que podemos escrever na primeira pagina da historia d'esta sciencia o nome do philosopho Thales (640 a 548 antes de Jesus Christo), natural da Phenicia, o mestre do grande Pythagoras, que fundou em Mileto a escola jonia.

Seguidamente Platão, Euclides, Hipparco, Ptolomeu, Viète, Kepler, Descartes, Leibnitz e Monge até aos nossos dias, foram os que definiram mais evidentemente as epochas de revolução, que constituiram, como dissemos, os periodos mais notaveis d'esta sciencia tão util, tão sublime.

Muitos outros geometras celebres, como Archimedes, Neper, Adriano Metius, Newton, Lagrange, Laplace, Legendre, Cuvier e outros mais, são vultos grandiosos na historia d'esta sciencia que, juntos aos que acima apontámos, concorreram para o seu progresso e ingrandecimento.

A Geometria abrange differentes ramos ou especialidades que poderemos classificar do seguinte modo: Geometria elementar, a que estuda as linhas, superficies e solidos mais simples; Geometria transcendente, a que tem por objecto o estudo das curvas e superficies de uma ordem superior; Geometria sublime, a que applica ao estudo das curvas e das superficies o calculo integral e differencial; Geometria analytica, a que applica ao estudo das curvas e das superficies o calculo algebrico; Geometria descriptiva, sciencia nova, que tem por fim a representação exacta dos corpos pelas suas projecções sobre planos dados; Geometria subterranea, a que tem por fim a resolução de problemas, empregando a geometria elementar, no estudo de minas; Geometria do compasso, a que tem por objecto as soluções graphicas dos problemas da geometria.

A Geometria elementar comprehende duas partes: *Geometria plana* e *Geometria no espaço.*

A *Geometria plana* tem por objecto o estudo das figuras que apresentam todos os pontos no mesmo plano; a *Geometria no espaço* estuda as propriedades das figuras que não estão n'um mesmo plano.

No presente volume trataremos da *Geometria plana.*

## PRELIMINARES

1. **Geometria.**— Pela palavra *Geometria,* derivada de dois vocabulos gregos *(gè* terra, e *metron* medida) designa-se a sciencia que trata da extensão.

2. **Extensão** é qualquer porção limitada do espaço. A extensão de um corpo é a porção do espaço occupada por esse corpo.

**Corpo ou volume** é uma extensão com tres dimensões: comprimento, largura e altura, espessura ou profundidade.

**Superficie** é uma extensão com duas dimensões: comprimento e largura, ou o limite exterior dos corpos.

**Linha** é uma extensão com uma só dimensão: comprimento, ou o limite de uma superficie.

**Ponto** é o logar da extensão que se considera sem dimensão, ou o limite de uma linha.

3. Um ponto movendo-se no espaço gera uma linha; uma linha movendo se gera uma superficie; e uma superficie movendo-se gera um volume.

Poderemos definir *ponto* a intersecção de duas linhas; *linha*, a intersecção de duas superficies.

4. Distinguem-se tres especies de linhas: *linha recta*, *linha curva*, e *linha quebrada* ou *polygonal*.

**Linha recta** é a mais curta distancia entre dois pontos.

**Linha curva** é toda a linha que não é recta nem composta de linhas rectas.

**Linha quebrada ou polygonal** é toda a linha composta de duas ou mais linhas rectas, unidas duas a duas pelos seus extremos, em direcções differentes.

5. Uma linha curva póde considerar-se uma linha polygonal composta de muitas linhas rectas infinitamente pequenas.

6. Um ponto designa-se por uma lettra, e uma linha por duas ou mais lettras de modo que possam bem definil-a.

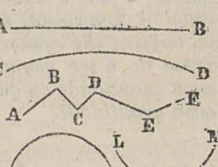

Fig. 1

Assim na (fig. 1) temos a linha recta $AB$, linhas curvas $CD$, $GH$ e $LM$, e linha quebrada ou polygonal $ABCDEF$. As lettras repetidas escrevem-se da seguinte fórma: $A'$, $A''$, $A'''$, etc.; e lêem-se $A$ linha, $A$ duas linhas, $A$ tres linhas, etc.

Dá-se o nome de *convexa* á linha curva ou polygonal quando não póde ser cortada por uma recta em mais de dois pontos.

7. *Se duas linhas quebradas ou curvas convexas terminarem nos mesmos pontos, a involvente é maior que a involvida.* Temos pois, na fig. 2, a linha $ABCD$ maior que $AED$.

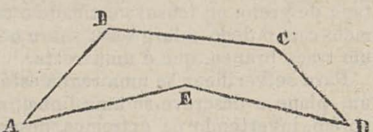

Fig. 2

8. **Superficie plana ou plano** é uma superficie, sobre a qual se podem traçar linhas rectas em todas as direcções.

Superficie curva é a que não é plana nem composta de superficies planas.

Superficie quebrada ou polyedrica é a formada por duas ou mais superficies planas, unidas duas a duas em direcções differentes.

9. Fica determinado um plano por tres pontos que não estão em linha recta, ou por uma linha recta e um ponto situado fóra d'essa recta, ou por duas rectas que se cortam.

10. Dá-se o nome de *figura* a todo o espaço terminado por uma ou mais linhas, por uma ou mais superficies. Duas ou mais figuras são eguaes quando podem ajustar-se perfeitamente uma sobre a outra.

*Figura plana* é a que tem todos os pontos em um só plano.

Dá-se o nome de *theorema* a uma proposição que precisa ser demonstrada; *corollario* é uma consequencia de um theorema; *problema* é uma applicação de um theorema. Quando na resolução dos problemas se empregam os numeros, dizem-se *numericos*; quando se empregam linhas, dizem-se *graphicos*. *Axioma* é uma verdade por si mesma evidente, isto é, que não precisa ser demonstrada. Temos, por exemplo, os seguintes axiomas: *o todo é maior que qualquer das suas partes; o todo é egual á somma das suas partes; duas quantidades eguaes a uma terceira são eguaes entre si; duas quantidades eguaes não deixam de o ser quando ambas augmentam ou diminuem a mesma quantidade ou quando se multiplicam ou se dividem pela mesma quantidade.*

## Linha recta

11. A linha recta que já definimos traça-se com o auxilio da regua, que é um instrumento de metal ou madeira, devendo ser perfeitamente lisa, chata e comprida. Poderemos tambem obter a linha recta esfregando com giz um cordão que se ajusta sobre um quadro negro (superficie plana pintada de preto, ou lousa); esticado o cordão, levanta-se até ao meio com o dedo e larga-se; sobre o quadro negro apparece um traço branco, que é uma recta.

Para se verificar se uma regua está direita, ajusta-se sobre um plano e descreve-se uma linha; ajustando-a novamente, porêm, invertendo os extremos, descreve-se outra linha que se coincidir com a primeira, conclue-se que a regua está direita. Algumas reguas são chanfradas; é conveniente usál-as quando se emprega a tinta.

12. Dois pontos determinam a posição de uma recta, e bem assim a sua grandeza se são os extremos da linha.

13. Para medir uma linha recta ou curva procura-se a relação que ha entre essa linha e uma outra de grandeza conhecida, que se considera como unidade. Quando essa relação não puder ser exactamente achada, as linhas dizem-se *incommensuraveis,* podendo comtudo determinar-se com bastante approximação.

Póde-se traçar uma recta com um comprimento determinado, ou conhecer a grandeza de uma recta empregando a regua graduada. Devemos ter, porêm, conhecimento da unidade linear que é o *metro.*

Em 1790 uma commissão nomeada pela Academia de França (incarregada da reforma dos pesos e medidas), composta de Borda, Lagrange, Laplace, Monge e Condorcet, e seguida pelos trabalhos de Méchain e Delambre, determinou o *metro* egual á decima millionesima parte do quarto do arco do meridiano terrestre.

O metro divide-se em dez partes eguaes que se denominam decimetros; cada decimetro, em dez centimetros; e cada centimetro em dez millimetros.

A regua graduada é a que tem um dos lados dividido em decimetros, centimetros e millimetros, tendo algumas a divisão em meios-millimetros.

## Angulos

14. **Angulo é a inclinação reciproca de duas linhas que se incontram n'um ponto.**

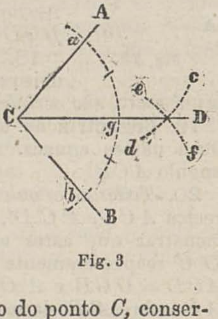

Fig. 3

As duas linhas chamam-se *lados* do angulo; e o ponto de intersecção, *vertice.*

Designa-se um angulo por tres lettras ou só pela do vertice, pondo sobre ella um pequeno angulo. A fig. 3 representa o angulo *C* ou *ACB,* devendo collocar-se a lettra do vertice sempre no meio.

15. Para se comprehender melhor o que acabamos de definir, imagine-se sobre a recta *AB* (fig. 4), uma outra *CD* que se confunde com a primeira; se a recta *CD* girar em-torno do ponto *C,* conservando-se no mesmo plano, toma ella differentes posições suc-

cessivas $CD'$, $CD''$, $CD'''$, etc., determinando tambem successivamente differentes angulos $DCD'$, $DCD''$, $DCD'''$, etc., cuja grandeza vae augmentando.

Concluimos que a grandeza de um angulo não depende do comprimento dos seus lados.

Dois angulos dizem-se eguaes quando, ajustados os vertices e assentando um lado de um sobre um lado de outro, os outros lados se confundem; e, quando se não confundirem, será maior o angulo dentro do qual fica o segundo lado do outro angulo.

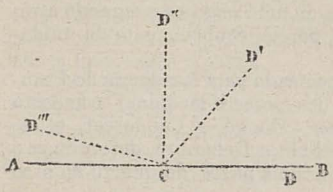

Fig. 4

16. **Angulos adjacentes.**—São os que têem um lado commum e os outros em linha recta; a sua somma é egual a dois rectos.

Quando os angulos adjacentes $ACD''$ e $D''CB$ (fig. 4) são eguaes, chamam-se *rectos* e a recta $D''C$ diz-se perpendicular a $AB$. Os angulos menores que um recto (como, por exemplo, $D'CB$) denominam-se *agudos;* os maiores (como $D'''CB$), *obtusos*. As linhas que formam com outra angulos adjacentes deseguaes, e dizem-se *obliquas*.

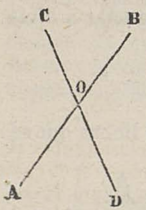

Fig. 5

17. Os angulos que têem o mesmo vertice e são formados pelos prolongamentos dos lados, denominam-se *verticalmente oppostos*. Assim os angulos $AOD$ e $COB$ ou $AOC$ e $BOD$ (fig. 5) são verticalmente oppostos.

18. Os angulos cuja somma fôr egual a dois rectos, são *supplementares;* e, se fôr egual a um recto, são *complementares*.

19. **Bissectriz** de um angulo é a recta que o divide em duas partes eguaes. A linha $CD$ (fig. 3) é a bissectriz do angulo $ACB$.

20. *Todos os angulos rectos são eguaes.*—Sejam os angulos rectos $ACD$, $A'C'D'$, $DCB$, $D'C'B'$ (fig. 6); queremos demonstrar que estes angulos são todos eguaes. Sendo $DC$ e $D'C'$ respectivamente perpendiculares a $AB$ e a $A'B'$ será $ACD=DCB$ e $A'C'D'=D'C'B'$. Se ajustarmos a recta $AB$ sobre $A'B'$ de maneira que o ponto $C$ fique sobre $C'$, a recta $CD$ cahirá sobre $C'D'$, porque se tomasse outra direc-

ção $C'D''$ teriamos $D''C'B' < D''C'A'$; mas $A'C'D' = D'C'B'$; e sendo $D''C'B' < D'C'B'$ e $D''C'A' > A'C'D'$, a recta $CD$ não era perpendicular a $AB$ e formaria com esta recta angulos deseguaes; isto é, $ACD$ não era recto, o que é contra a hypothese.

Concluimos que $CD$ se ajusta sobre $C'D'$, e que os quatro angulos são eguaes.

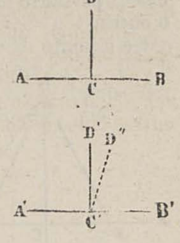

Fig. 6

21. *A somma de todos os angulos formados em-torno de um ponto para o mesmo lado de uma recta vale dois rectos.* — Sejam os angulos $ACD'''$, $D'''CD'$ e $D'CB$ (fig. 4), e formando com $CD''$ os angulos rectos $ACD''$ e $D''CB$; a somma dos angulos dados vale dois rectos porque é egual á dos angulos $ACD''$ e $D''CB$.

22. *A somma de todos os angulos formados em torno de um ponto por qualquer numero de rectas vale quatro rectos.*—Sejam os angulos $AOB$, $BOC$, $COD$ e $DOA$ (fig. 7). Prolongando a recta $AO$ sabemos que a somma de todos os angulos formados para a parte superior de $AE$ vale dois rectos (21) (*), assim como a dos formados para a parte inferior; portanto a somma de todos os angulos dados vale quatro rectos.

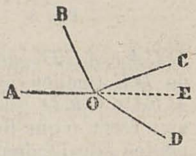

Fig. 7.

23. *Os angulos verticalmente oppostos são eguaes.*— Sejam os angulos $AOD$ e $COB$ (fig. 5); temos que $AOD + BOD =$ dois angulos rectos (21) e $COB + BOD =$ dois angulos rectos; se a estas sommas, que são eguaes, tirarmos o angulo commum $BOD$, os restos ficarão eguaes, isto é, $AOD = COB$, o que se queria demonstrar.

24. Os angulos eguaes têem supplementos ou complementos eguaes. Reciprocamente os angulos que têem supplementos ou complementos eguaes, são eguaes.

## Perpendiculares e obliquas

25. *De um ponto não se póde tirar senão uma perpendicular a uma recta.*— Supponhamos o ponto $C'$ na recta $A'B'$

(*) Os numeros indicados dentro do parenthesis referem-se aos paragraphos que se devem consultar.

(fig.6); se por esse ponto pudessemos tirar duas perpendiculares $C'D'$ e $C'D''$, os dois angulos $B'C'D'$ e $B'C'D''$ seriam rectos e portanto eguaes, o que é absurdo, porque um contêm o outro.

Se o ponto $D$ existe fóra da recta $AB$ (fig. 8), não se póde abaixar senão uma perpendicular sobre a recta. Dobrando a parte superior do plano em-torno de $AB$, o ponto $D$ cahirá em $D'$; os angulos $ACD$ e $ACD'$ são eguaes e rectos; portanto $AC$ é perpendicular a $DD'$; e esta recta, perpendicular a $AB$. Para se demonstrar que qualquer outra recta $DE$ não póde ser perpendicular a $AB$, dobre-se o plano como acima fizemos. O ponto $D$ torna a posição $D'$, $DC$ ajusta-se sobre $CD'$ e $DE$ sobre $ED'$. Sendo $DE$ perpendicular a $AB$, os angulos $DCA$ e $ACD'$ são rectos, e a linha $DCD'$ é recta; mas, sendo $DE$ tambem perpendicular a $AB$, temos que os angulos $DEC$ e $CED$ são tambem rectos e a linha $DED'$ será uma recta, o que fica absurdo porque não póde haver entre os pontos $D$ e $D'$ duas linhas que se possam distinguir.

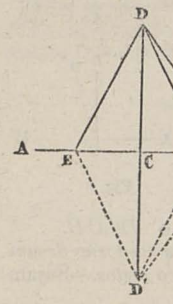


Fig. 8

26. *A perpendicular baixada de um ponto para uma recta é menor do que qualquer obliqua tirada do mesmo ponto para a mesma recta.* — Seja a perpendicular $DC$ e a obliqua $DE$ fig. 8); queremos demonstrar que $DC$ é menor que $DE$. Dobre-se a parte superior do plano em-torno de $AB$; e, sabendo (4) que a linha recta é a mais curta distancia entre dois pontos, temos:

$$DD' < DED'$$

e será

$$\frac{1}{2}DD' < \frac{1}{2}DED'$$

mas metade de $DD'$ é $DC$, e metade de $DED'$ é $DE$; logo, como se pretendia demonstrar: $DC < DE$.

27. *Se duas obliquas tiradas de um ponto exterior para uma recta se desviarem egualmente do pé da perpendicular baixada do mesmo ponto sobre a recta, são eguaes; e é maior a que se desvia mais.*—Vamos provar que sendo $CE = CF$ (fig. 8)

as obliquas $DE$ e $DF$ são eguaes. Dobrando o plano pela perpendicular $DC$, como os angulos $DCB$ e $DCA$ são eguaes, a recta $CB$ ajusta-se sobre $CA$, e portanto o ponto $F$ cahirá sobre $E$, visto que $CF = CE$; logo a recta $DF$ ajusta-se exactamente sobre $DE$; isto é, são eguaes assim como os angulos $CDF$ e $CDE$. Se, porêm, fôr $CG > CF$, a obliqua $DG$ será tambem maior que $DF$, como vamos demonstrar. Dobrando o plano por $AB$ temos (7) que

$$DGD' > DFD'$$

será da mesma fórma

$$\frac{1}{2} DGD' > \frac{1}{2} DFD'$$

mas

$$\frac{1}{2} DGD' = DG$$

e

$$\frac{1}{2} DFD' = DF$$

logo

$$DG > DF \text{ ou } DE$$

e o angulo $CDG$ maior que $CDF$.

28. Concluimos pelos principios que acima demonstrámos que do mesmo ponto não se podem tirar para uma recta tres obliquas eguaes, nem duas para o mesmo lado da perpendicular baixada d'esse ponto sobre a recta.

29. *A perpendicular ao meio de uma recta tem cada um dos seus pontos egualmente afastados dos extremos d'essa recta.*— Seja $D$ um ponto tomado na perpendicular $DC$ (fig. 8) levantada ao meio de $EF$, será $DE = DF$ (27,) porque são duas obliquas que se afastam egualmente do pé da perpendicular. Qualquer outro ponto tomado fóra da perpendicular não está egualmente afastado dos extremos da recta. Seja o ponto $E$ (fig. 9) que não está sobre a perpendicular $CD$ levantada ao meio de $AB$; unindo esse ponto com os extremos $A$ e $B$ da recta, $AE$ intercepta a perpendicular no ponto $F$, e temos

$$AF = BF \qquad (27)$$

mas

$$EB < BF + FE \qquad (4)$$

e como

$$BF = AF$$

temos

$$EB < AF + FE$$

isto é

$$EB < EA$$

o que se queria demonstrar.

30. Baixando de um ponto uma perpendicular sobre uma

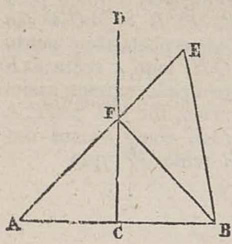


Fig. 9

recta, a distancia d'esse ponto á recta mede-se pela perpendicular.

31. *A bissectriz de um angulo está egualmente afastada dos lados d'esse angulo.*— Seja o angulo $ACB$ (fig. 3) e $CD$ a sua bissectriz; baixando do ponto $g$ perpendiculares sobre os dois lados e dobrando a figura por $CD$, o lado $CA$ ajusta-se sobre $CB$, assim como as perpendiculares tiradas do ponto $g$, (que medem as distancias aos lados do angulo), porque se não ajustassem haveria d'este mesmo ponto duas perpendiculares á mesma recta, o que é absurdo.

32. Dá-se o nome de *logar geometrico* á serie de pontos que têem a mesma propriedade. Assim a perpendicular ao meio de uma recta é o logar geometrico de todos os pontos equidistantes dos extremos: a bissectriz de um angulo é o logar geometrico de todos os pontos do plano equidistantes dos lados.

## Parallelas

33. Rectas parallelas são as que, situadas no mesmo plano, conservam sempre espaços eguaes entre si. Assim a recta $AB$ (fi. 10) é parallela a $CD$, porque se a prolongassemos não incontraria esta recta. A recta $EF$ que corta as parallelas nos pontos $G$ e $H$, chama-se *transversal* ou *secante*, e fórma differentes angulos que têem as seguintes denominações:

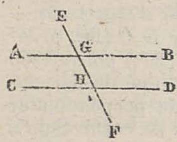


Fig. 10

| | | |
|---|---|---|
| Externos | $EGB$, $CHF$ | Alternos-externos |
| | $EGA$, $DHF$ | » » |
| Internos | $AGH$, $GHD$ | alternos-internos |
| | $BGH$, $CHG$ | » » |

| | |
|---|---|
| $EGA$<br>$CHF$ | externos do mesmo lado da secante |
| $EGB$<br>$DHF$ | » » » » » » |
| $AGH$<br>$GHC$ | internos do mesmo lado da secante |
| $BGH$<br>$GHD$ | » » » » » » |
| $EGB$<br>$EHD$ | correspondentes |
| $BGH$<br>$DHF$ | » |
| $EGA$<br>$EHC$ | » |
| $AGH$<br>$CHF$ | » |

34. *Uma recta perpendicular a outra é incontrada por qualquer obliqua a essa mesma recta.*—Este principio, conhecido pelo nome de *postulado de Euclides,* é em que se baseia a theoria das parallelas.

35. *As perpendiculares á mesma recta são parallelas entre si.*—Sejam as perpendiculares $CD$ e $EF$ (fig. 11) á recta $AB$; se, prolongando as, se incontrassem em um ponto $D'$, concluiamos que do mesmo ponto $D'$ se podiam abaixar duas perpendiculares sobre a mesma recta, o que é impossivel. Pela reciproca d'este principio temos que, se uma de duas parallelas fôr perpendicular a uma recta, a outra tambem será perpendicular; o que facilmente se póde demonstrar.

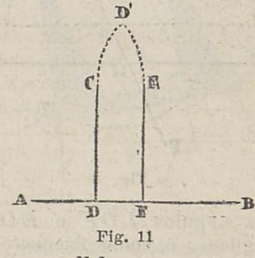

Fig. 11

36. *Por um ponto dado fóra de uma recta não se póde tirar senão uma parallela a essa recta.*—Seja o ponto dado $E$ e a recta $AB$ (fig. 12); para tirarmos uma parallela a esta linha pelo ponto $E$, baixamos d'este ponto uma perpendicular $EF$, e no extremo $E$ levantamos uma perpendicular $CD$ a $EF$. Pelo que já demonstrámos (35), sabemos que $CD$ é parallela a $AB$; e pelo ponto dado não é possivel tirar outra, porque qualquer recta $C'D'$ é obliqua a $EF$ e incontraria $AB$ (34); o que prova que não se póde pelo ponto $E$ tirar mais do que uma parall la $AB$.

37. *Duas parallelas são equidistantes em todos os seus pontos.*—Seja $A\,B$ parallela a $C\,D$ (fig. 12) e sobre esta recta marquem-se os pontos $G$ e $L$ e baixem-se sobre $A\,B$ as perpendiculares $G\,H$ e $L\,M$; divida se, pelo ponto $E$, $G\,L$ ao meio e baixe-se a perpendicular $E\,F$. Dobrando a figura por $E\,F$, as rectas $E\,D$ e $F\,B$ cahirão sobre $E\,C$ e $F\,A$; o ponto $L$ cahirá sobre $G$, e $M$ sobre $H$, visto ser $E\,L = E\,G$ e $F\,M = F\,H$; logo $L\,M$ ajusta-se sobre $G\,H$, porque aliás sería falso um principio já demonstrado (25); concluimos, pois, ser $G\,H = L\,M$, o que se pretendia provar.

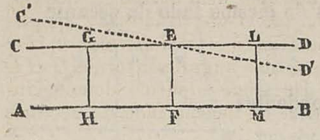

Fig. 12

38. *Os angulos alternos-internos e os alternos-externos formados por duas parallelas cortadas por uma secante são eguaes.* —Temos $A\,B$ parallela a $C\,D$, e $E\,F$ a secante (fig. 13) que corta as parallelas nos pontos $G$ e $H$; vamos provar que o angulo $A\,G\,E$ é egual a $D\,H\,F$, e $G\,H\,D$ egual a $A\,G\,H$. Divida-se ao meio $G\,H$ pelo ponto $O$ e tire-se $L\,M$ parallela a $A\,B$. Se imaginarmos cortada a figura por $L\,M$ e se fizermos girar a parte inferior do plano em-torno do ponto $O$, até que a parte $O\,M$ se ajuste sobre $O\,L$, tambem $O\,F$ se ajustará sobre $O\,E$, visto que os angulos $L\,O\,F$ e $E\,O\,M$ (verticalmente oppostos) são eguaes; e, como fizemos $O\,H$ egual a $O\,E$, segue-se que o ponto $H$ cagirá sobre o ponto $G$, e a recta $H\,D$ sobre $G\,A$ porque são parallelas a $L\,M$.

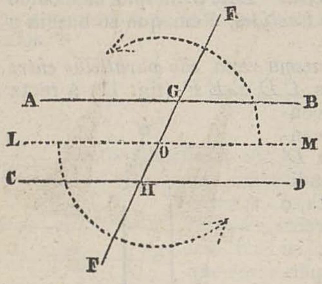

Fig. 8

Vê-se, portanto, $H\,F$ perfeitamente assente sobre $G\,E$, e $H\,D$ sobre $G\,A$, isto é, o angulo $A\,G\,E = D\,H\,F$, $G\,H\,D = A\,G\,H$, e do mesmo modo $E\,G\,B = C\,H\,F$ e $B\,G\,H = C\,H\,G$.

39. *As parallelas cortadas por uma secante formam os angulos correspondentes eguaes.*—Sejam as parallelas $A\,B$ e $C\,D$ e a secante $E\,F$ (fig. 13); queremos demonstrar que os angu-

los $EGB$ e $GHD$ são eguaes. Sabemos que $GHD = AGH$ (33) mas $AGH = EGB$ (23) logo:

$$GHD = EGC$$

40. *Em duas parallelas cortadas por uma secante, os angulos internos ou externos do mesmo lado d'esta linha são supplementos.*—Sabemos (fig. 13) que $CHG = BGH$; mas $CHG$ é supplemento de $GHD$; logo os dois angulos internos $GHD$ e $BGH$ são supplementos. De modo identico demonstrariamos que os angulos externos do mesmo lado da secante são supplementos.

41. *Por um ponto tirar uma parallela a uma recta.*—Seja o ponto $E$ e a recta $AB$ (fig. 12); baixando do ponto $E$ a perpendicular $EF$ sobre $AB$ e pelo mesmo ponto a perpendicular $CD$ a $EF$, temos (35) a recta $CD$ parallela a $AB$. Podemos resolver este problema empregando a regua e o esquadro. Para se traçar uma parallela a $AB$ (fig. 14) ajusta-se um dos lados do esquadro $ab$ com a recta dada, e ao outro lado $ac$ do esquadro ajusta-se uma regua; segurando esta e fazendo escorregar o esquadro ao longo da regua até que o lado $ba$ incontre o ponto dado, e traçando $A'B'$, suppondo que esta recta passa pelo ponto dado, temos resolvido o problema (39). Na mesma figura se vê, pelo que acima dissemos, que a recta $C'D'$ é parallela a $CD$.

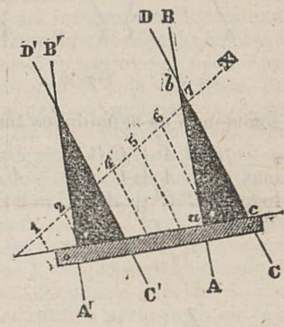

Fig. 14

42. *Dois angulos que têem os lados parallelos são eguaes ou supplementos.*—Sejam os angulos $ABC$ e $A'B'C'$ (fig. 15) que têem os lados $AB$ e $A'B'$, $BC$ e $B'C'$ respectivamente parallelos, queremos demonstrar que estes angulos são eguaes. Unindo por meio de uma recta os vertices dos angulos dados, temos (21) que:

$$DBA + ABC + CBE = 2r\ (*)$$

e

$$DB'A' + A'B'C' + C'B'E = 2r$$

logo $DBA + ABC + CBE = DB'A' + A'B'C' + C'B'E$

(*) A lettra $r$ depois do algarismo, designa que são tantos angulos rectos quantos o algarismo indica.

mas como $DBA = DB'A'$
e $CBE = C'B'E$ (39)
concluimos que $ABC = A'B'C'$

Os angulos $ABC$ e $A'B'C'$ (fig. 16) que têem os lados $AB$ e $A'B'$, $BC$ e $B'C'$ respectivamente parallelos, são supplementos. Unindo os vertices dos angulos dados, temos:

$DBA = DB'A'$ (39)
e $CBB' = C'B'B$ (38)

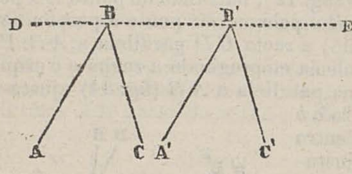

Fig. 15

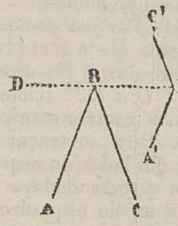

Fig. 16

sommando as egualdades temos:

$DBA + CBB' = DB'A' + CB'B$ ou $A'B'C'$
mas $DBA + CBB' + ABC = 2r$ (21)
logo $A'B'C' + ABC = 2r$; isto é, são supplementos.

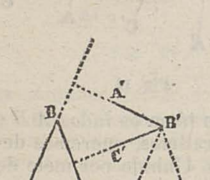

Fig. 17

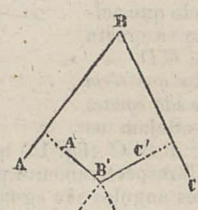

Fig. 18

43 *Dois angulos que têem os lados perpendiculares são eguaes ou supplementos.*— Os angulos $ABC$ e $A'B'C'$ (fig. 17) que têem os lados $AB$ e $A'B'$, $BC$ e $B'C'$ respectivamente perpendiculares são eguaes. Traçando $B'D$ parallela a $BA$, e $B'E$ parallela a $BC$, será $B'D$ perpendicular a $A'B'$ e $B'E$ perpendicular a $B'C'$ (35), logo os angu-

los $A' B' D$ e $C' B' E$ são rectos e portanto eguaes. Se tirarmos a estes dois angulos o commum $C' B' D$, ficará $A' B' C' = D B' E$; mas $D B' E = A B C$ (42); logo $A B C = A' B' C'$, o que se desejava demonstrar.

Os angulos $A B C$ e $A' B' C'$ (fig. 18) que têem os lados $A B$ e $A' B'$, $B C$ e $B' C'$, respectivamente perpendiculares, são supplementos. Traçando $B' D$ parallela a $A B$, e $B' E$ parallela a $B C$, será o angulo $A B C = D B' E$ (42); e, como são rectos os angulos $A' B' D$ e $C' B' E$ (35), concluimos (22) que os angulos $A' B' C'$ e $D B' E$ ou $A B C$ são supplementos.

## CIRCUMFERENCIA

### Definições

44. **Circumferencia.**— E' a linha curva, cujos pontos, situados no mesmo plano (fig. 19) estão egualmente afastados de um ponto interior $C$ chamado centro.

Esta curva descreve-se com um instrumento denominado *compasso*. O compasso é um instrumento de metal que consta de duas *hastes* ou *pernas* ligadas de modo que se podem approximar ou afastar girando em-torno de uma charneira. Em alguns compassos as hastes terminam por agulhas, que se seguram por meio de parafusos. Ha duas peças, o *porta-lapis* e o *tira-linhas*, que se podem adaptar a uma das hastes, segundo queremos traçar a curva com lapis ou com tinta. Quando se quizerem traçar circumferencias muito grandes, accrescenta-se uma das hastes, juntando depois á peça addicional o *porta-lapis* ou o *tira-linhas;* se, porêm, as circumferencias são muito pequenas, emprega-se o compasso denominado de *circulos minimos.* Este instrumento denomina-se *compasso simples* quando se lhe não póde adaptar o *porta-lapis* ou *tira-linhas;* e no caso contrario, *compasso composto.*

**Circulo** é a superficie limitada pela circumferencia. O ponto $C$ (fig. 19) diz-se centro do circulo.

**Arco de circulo** é uma porção qualquer da circumferencia. Um arco de circulo designa-se pelo signal $\frown$; assim temos (fig. 19) os arcos $\overset{\frown}{A B}$, $\overset{\frown}{F B}$, etc.

**Raio** é qualquer recta que tem um dos extremos no centro do circulo e o outro extremo em um ponto da circumferencia. Na fig. 19 as rectas $C A$, $C B$ e $C D$, são raios do circulo.

**Diametro** é a recta que tem os extremos na circumferencia e passa pelo centro. Dois raios em linha recta determinam um diametro que divide a circumferencia e o circulo em duas partes eguaes, a cada uma das quaes se dá o nome de *semi-circumferencia* e *semi-circulo*. A recta $BD$ (fig. 19) é um diametro.

**Corda** é a recta que une as extremidades de um arco. A recta $EF$ (fig. 19) é uma corda.

**Tangente** é a recta que toca a circumferencia em um ponto. A recta $ST$ é uma tangente (fig. 19), e $D$ (unico ponto commum á recta e á circumferencia) denomina-se *ponto de contacto* ou de *tangencia*.

**Secante** é a recta indefinida que corta a circumferencia em dois pontos. A recta $HI$ (fig. 19) é uma secante.

**Sector circular** é a porção do plano do circulo (fig. 20) limitada pelos raios $CA$ e $CB$ e pelo arco de circulo $AB$.

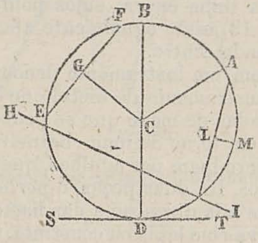


Fig. 19

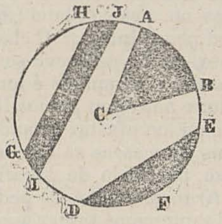


Fig. 20

**Segmento circular** é a porção do plano do circulo limitada pela corda $DE$ (fig. 20) e pelo arco do circulo $DFE$.

**Zona** é a porção do plano do circulo limitada por duas cordas parallelas $GH$ e $IJ$ (fig. 20) e pelos arcos $GI$ e $HJ$.

Todos os raios do mesmo circulo são eguaes; portanto todos os diametros do mesmo circulo tambem são eguaes, visto que cada um d'elles é egual ao dobro do raio. Uma circumferencia ou um circulo póde designar-se pelo seu raio.

**Circumferencias concentricas** são as que têem o mesmo centro.

**Corôa circular** é a porção do plano comprehendida entre duas circumferencias concentricas.

**Circumferencias excentricas** são as que não têem o mesmo centro. As circumferencias excentricas são *excentricas exteriores* (fig. 21), ou *excentricas interiores* (fig. 22). Nas excentricas exteriores a distancia dos centros é maior que a somma dos raios; nas excentricas interiores é menor que a sua differença.

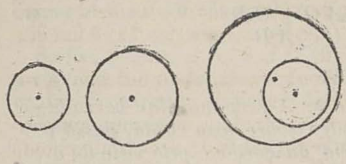

Fig. 21 Fig. 22

**Circumferencias secantes** são as que se cortam ou que têem só dois pontos communs. A distancia dos centros de duas circumferencias secantes é menor que a somma dos raios e maior que a sua differença.

**Circumferencias tangentes** são as que têem um só ponto commum, que se denomina *ponto de contacto*. Quando uma das circumferencias tangentes está dentro da outra, denominam-se *tangentes interiores;* e quando está fóra, *tangentes exteriores.* Nas circumferencias tangentes interiores, a distancia dos centros é egual á differença dos raios; e nas tangentes exteriores, é egual á sua somma.

45. Como dissemos, o instrumento empregado para traçar uma circumferencia é o compasso; fixa-se a extremidade de uma das hastes sobre o plano; e movendo o compasso de modo que a outra extremidade, armada com o porta-lapis ou tira-linhas, esteja assente sobre o plano, temos assim traçada a curva. Se prendermos um cordel a uma haste fixa em um ponto, e ligando á outra extremidade um bocado de madeira (aguçada em um dos extremos) fizermos girar esta em-torno da extremidade fixa, descreveremos uma circumferencia.

46. *As circumferencias e os circulos que têem raios eguaes, são eguaes.*— Dadas duas circumferencias de raios eguaes, ajustando os centros e os planos, as curvas confundem-se.

47. *O diametro divide a circumferencia e o circulo em duas partes eguaes.*— Se dobrarmos o plano do circulo pelo diametro $B D$ (fig. 19), de modo que $B A D$ assente sobre $B E D$, todos os pontos do primeiro arco cahirão sobre os do outro arco; porque, se não se ajustassem, não seriam todos os pontos equidistantes do centro.

48. *O diametro é a maior de todas as cordas.*— Na circumferencia de raio $O A$ (fig. 23) tire-se o diametro $A B$ e a corda $A C$; queremos demonstrar que $A B$ é maior que $A C$. Unindo o centro $O$ com o ponto $C$ (extremo da corda), temos que (4):

$$A C < A O + O C$$

mas sabemos que todos os raios do mesmo circulo são eguaes,

portanto $OC = OB$
logo $AC < AO + OB$
ou $AC < AB$
o que se pretendia demonstrar.

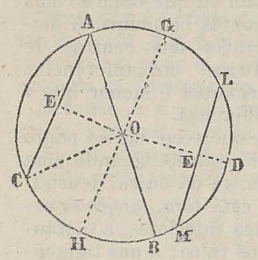

Fig. 23

49. *A perpendicular baixada do centro sobre uma corda, passa pelo meio da corda e pelo meio do arco.* — Seja a corda $LM$ (fig. 23) e a perpendicular $OE$; queremos demonstrar que esta perpendicular divide ao meio a corda $LM$ e o arco $LDM$. Dobrando a figura por $OD$, as duas semi-circumferencias ajustam-se, $EM$ cahirá sobre $EL$; logo o ponto $M$ cae sobre $L$, d'onde se conclue que o ponto $E$ constitue o meio da corda, e o ponto $D$ o meio do arco.

50. *Tres pontos não em linha recta, determinam uma circumferencia.* — Sendo dados os tres pontos $A$, $B$ e $C$ (fig. 24) que determinam a linha quebrada $ABC$, levantando ao meio de $AB$ a perpendicular $DE$, temos (29) que todos os pontos d'esta linha estão egualmente afastados de $A$ e $B$, assim como todos os pontos da perpendicular $FG$ levantada ao meio de $BC$, estão egualmente afastados de $B$ e $C$; logo o ponto $O$, onde se interceptam as perpendiculares, está equidistante de $A$, $B$ e $C$, isto é, será o centro do circulo cuja circumferencia passa pelos pontos dados.

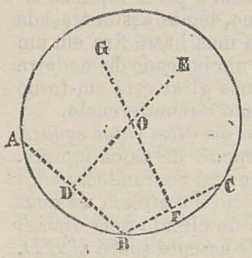

Fig. 24

51. *No mesmo circulo ou em circulos eguaes, a arcos eguaes correspondem cordas eguaes, e ao arco maior corresponde corda maior.* — Queremos demonstrar que, sendo o arco $AC$ egual ao arco $LM$ (fig. 23), a corda $AC$ é egual á corda $LM$. Dividindo o arco $AL$ ao meio pelo ponto $G$, e tirando o diametro $GH$, dobra-se a figura por esta linha; as semi-circumferencias ajustam-se, o ponto $L$ cahirá sobre o ponto $A$, visto termos feito $AG = GL$, e como $\widehat{AC} = \widehat{LM}$ segue-se que o

ponto $M$ cahirá sobre o ponto $C$, d'onde concluimos que as cordas $A\,C$ e $L\,M$ são eguaes, o que se pretendia provar.

Se fôr, porêm, $\overset{\frown}{A\,B} > \overset{\frown}{A\,C}$ (fig. 25) vamos demonstrar que a corda $A\,B$ é maior que a corda $A\,C$. Baixando do ponto $O$, centro do circulo, a perpendicular $O\,D$ sobre a corda $C\,B$, sabemos que (4):

$$A\,C < A\,E + E\,C$$

mas como $\quad E\,C = E\,B$ (29)

temos $\quad A\,C < A\,E + E\,B$

ou $\quad A\,C < A\,B$

o que se pretendia demonstrar.

O principio que acabámos de demonstrar, e em que considerámos as cordas no mesmo circulo, analogamente o demonstrariamos se fossem dados em circulos differentes, com o mesmo raio.

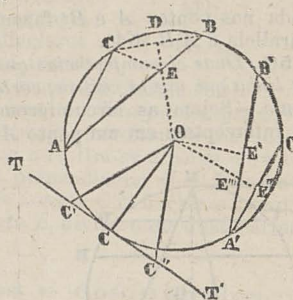

Fig. 25

52. *No mesmo circulo ou em circulos eguaes, cordas eguaes são equidistantes do centro, e a corda maior dista menos.*— Sejam $A\,C$ e $L\,M$ as cordas eguaes (fig. 23); vamos demonstrar que $O\,E$ e $O\,E'$ perpendiculares tiradas do centro sobre as cordas, são eguaes. Dividindo o arco $A\,L$ ao meio pelo ponto $G$, e tirando o diametro $G\,H$, dobre-se a figura por esta linha; as semi-circumferencias ajustam-se, a corda $L\,M$ assenta sobre $A\,C$ e portanto o ponto $E$, que divide ao meio $L\,M$, cahirá sobre $E'$ que divide ao meio $A\,C$; d'onde concluimos ser $OE$ egual a $OE'$. Se fôr, porêm, a corda $A'\,B' > A'\,C'$ (fig. 25), será $O\,E' < O\,E''$. Visto ser $O\,E'$ perpendicular a $A'\,B'$, será $O\,E' < O\,E'''$ (26); mas $O\,E''' < O\,E''$; logo com maior razão será $O\,E' < O\,E''$, o que se desejava demonstrar.

53. *A tangente á circumferencia é perpendicular ao raio tirado para o ponto de contacto.*— Seja a tangente á circumferencia $T\,T'$ (fig. 25); a recta $O\,C$ será o raio. Se do ponto $O$ se tirarem outras rectas $O\,C'$, $O\,C''$ etc., serão todas maiores que $O\,C$, pelo que concluimos (26) que esta recta é a menor que se póde tirar do ponto $O$, e portanto é perpendicular á tangente.

54. *Duas cordas parallelas interceptam na circumferencia arcos eguaes.*— Vamos demonstrar que, sendo a corda $A\,B$ parallela a $C\,D$ (fig. 26), o arco $A\,C$ é egual a $B\,D$. O diametro $E\,F$ perpendicular a $A\,B$ sel-o-ha tambem a $C\,D$; dobrando por $E\,F$ a figura, as semi-circumferencias ajustam-se; o ponto $A$ cae sobre o ponto $B$, e $C$ sobre o ponto $D$, pelo que concluiremos ser $\overset{\frown}{A\,C} = \overset{\frown}{B\,D}$, o que se pretendia demonstrar.

55. *Traçar uma parallela a uma recta dada.*— Seja $A\,B$ a recta dada (fig. 26); faz-se centro em um ponto qualquer $O$ descreve-se uma circumferencia de modo que córte a recta dada nos pontos $A$ e $B$; fazendo $\overset{\frown}{A\,C} = \overset{\frown}{B\,D}$, a recta $C\,D$ é parallela a $A\,B$ (54).

56. *Duas circumferencias que têem um ponto commum fóra da linha que une os centros, cortam-se reciprocamente em outro ponto.*— Sejam as circumferencias de raios $O\,A$ e $O'\,A$ que se interceptam em um ponto $A$ (fig. 27); tire-se d'este ponto

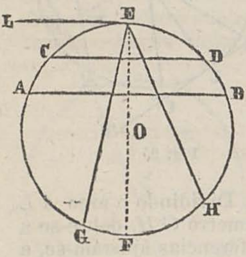


Fig. 26

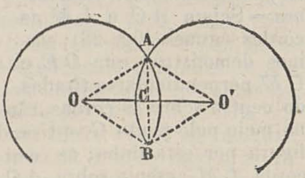


Fig. 27

uma perpendicular sobre $O\,O'$ e faça-se $C\,B$ egual a $A\,C$. Temos pois que o ponto $B$ pertence á circumferencia de raio $O\,A$, visto ser $O\,A$ egual a $O\,B$, assim como pertence á circumferencia de raio $O'\,A$, visto ser $O'\,A$ egual a $O'\,B$; portanto o ponto $B$ é commum ás duas circumferencias, o que se pretendia demonstrar.

Sendo $O\,A = O\,B$ e $O'\,A = O'\,B$, temos que a recta $O\,O'$ tem dois pontos equidistantes dos extremos de $A\,B$, e portanto é perpendicular ao meio d'esta recta; d'onde concluimos que nas circumferencias secantes a linha que une os centros é perpendicular ao meio da corda commum.

57. *Levantar uma perpendicular ao meio de uma recta.*— Seja a recta $A B$ (figura 28); fazendo centro em $A$ descreve-se um arco de circulo com um raio maior que metade de $A B$, e com o centro em $B$ e com o mesmo raio descreve-se outro arco de circulo que intercepta o primeiro nos pontos $C$ e $B$; a recta $C D$ é perpendicular ao meio de $A B$ (29).

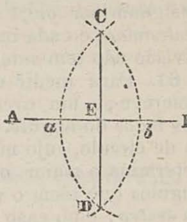

Fig. 28

58. *Dada uma circumferencia ou um arco de circulo, achar o centro.*— Seja dada a circumferencia (fig. 24) e tomem-se n'ella os tres pontos $A, B$ e $C$; tirem-se as cordas $A B$ e $B C$, e ao meio d'ellas levantem-se as perpendiculares $D E$ e $F G$; o ponto $O$ (onde se interceptam as perpendiculares) é o centro do circulo (50).

59. *Dividir um angulo, ou arco, em duas partes eguaes.*— Seja o angulo $A C B$ (fig. 3); fazendo centro em $C$ e com quálquer raio $C a$ descreva-se o arco $a b$; tire-se a corda $a b$ e ao meio d'esta linha levante-se a perpendicular $C D$. Pelo que já demonstrámos (49), temos que a recta $C D$ é a bissectriz do angulo dado e do arco $a b$; isto é, divide-o em duas partes eguaes.

## Medição dos arcos e dos angulos. Divisão da circumferencia

60. Póde avaliar-se a grandeza de um arco por duas maneiras: pelo seu comprimento em metros, centimetros e millimetros, ou pela sua relação com a circumferencia. Para facilitar esta comparação, suppõe-se a circumferencia dividida em 360 parte eguaes, chamadas *graus*. Cada grau subdivide-se em 60 *minutos* e cada minuto em 60 *segundos*; assim uma circumferencia tem 360 graus, 21:600 minutos e 1.296:000 segundos. Esta divisão denomina-se *sexagimal*. Um arco de 14 graus, 7 minutos e 20 segundos, escreve-se da seguinte fórma: $14^0\ 7'\ 20''$ (os signaes $^0\ '\ ''$ designam *graus*, *minutos* e *segundos*). Se tivermos um arco de $30^0$, elle vale $\frac{30}{360}$ da circumferencia; do mesmo modo um arco de $30^0\ 10'\ 20''$ ou $108{:}620''$ será $\frac{108{:}620}{1.296{:}000}$ da circumferencia.

Ha outra divisão da circumferencia denominada *centesimal*, na qual a circumferencia se divide em 400 partes eguaes, que se denominam *grados* ou graus centesimaes (que se designam por *gr*); cada grado subdivide-se em 100 *minutos centesimaes* e cada minuto em 100 *segundos centesimaes*. Esta divisão não tem sido adoptada.

61. Para medir um angulo faz-se centro no seu vertice e descreve-se um arco de circulo que tenha os seus extremos nos lados do angulo. Assim, a um angulo corresponde um arco de circulo, cujo numero de graus e minutos (d'esse arco) determina o maior ou menor afastamento dos seus lados. Os angulos que têem o vertice no centro, denominam-se *angulos ao centro*; e no caso contrario, *angulos excentricos*.

*Angulos inscriptos* são os que têem o vertice na circumferencia, e cujos lados são duas cordas.

62. *No mesmo circulo ou em circulos eguaes, angulos ao centro eguaes interceptam arcos eguaes.*—Sejam os angulos eguaes $AOB$ e $COD$ (fig. 29); queremos demonstrar que $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$. Dividindo ao meio o arco $BC$ pelo ponto $E$, tire-se o diametro $EF$; e dobrando por elle a figura, o ponto $B$ cahirá sobre o ponto $C$, visto ser $EB = EC$, e portanto $OB$ ajusta-se com $OC$, e $OA$ tomará a direcção de $OD$; logo $\overset{\frown}{AB}$ assenta sobre $\overset{\frown}{CD}$; isto é, são eguaes.

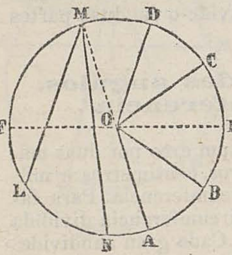

Fig. 29

63. *Os angulos ao centro determinados no mesmo circulo ou em circulos eguaes, estão entre si como os arcos.*— Descrevendo dos vertices $B$ e $b$, dos angulos $ABC$ e $abc$ (fig. 30), arcos de circulo com os raios $BD$ e $bd$ eguaes, queremos demonstrar que $\frac{ABC}{abc} = \frac{\overset{\frown}{DE}}{\overset{\frown}{de}}$.

Supponhamos que o angulo tomado por unidade se contêm duas vezes em $abc$ e cinco vezes em $ABC$; temos portanto que entre os dois angulos a razão será: $\frac{ABC}{abc} = \frac{5}{2}$.

Mas, pelo que já demonstrámos (62), concluimos qual a razão entre os arcos $\frac{\widehat{DE}}{\widehat{de}} = \frac{5}{2}$; e d'aqui temos o que se pretendia demonstrar: $\frac{ABC}{abc} = \frac{\widehat{DE}}{\widehat{de}}$.

Pelos principios que acima demonstrámos, comprovando o que mais acima dissemos, concluimos que, sendo o arco uma grandeza de natureza differente do angulo, podemos procurar a medida do arco em vez da medida do angulo, tomando por unidade de medida, para este, a que se considere como unidade principal dos arcos.

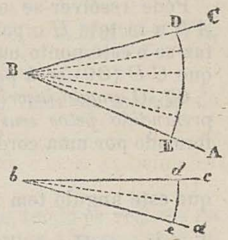

Fig. 30

64. Para se conhecer a grandeza de um angulo emprega-se um instrumento denominado *transferidor* (fig. 31), que é um circulo ou semicirculo graduado. Este instrumento o mais usual, semi-circular, divide-se em 180°, sendo duplicada a graduação, como se vê na figura. Para se conhecer o valor do angulo $A\,C\,B$ (fig. 3), colloca-se o centro do semi-circulo graduado ou *ponto-de-fé* no vertice $C$ do angulo dado, e ajusta-se o raio que passa pelas divisões 0°—180° ou 180°—0° com um dos lados do angulo; o outro lado marca o numero de graus, isto é, a grandeza do angulo. O angulo que tem por medida um arco de 90°, denomina-se *angulo recto*; se tem mais de 90°, *angulo obtuso*; se tem menos, *angulo agudo*.

65. *Construir um angulo egual a um angulo dado.*— Para construir um angulo egual a $A\,C\,B$ (fig. 3), sobre uma recta, faz-se centro em um ponto qualquer d'ella, e com um raio arbitrario descreve-se um arco de circulo; fazendo centro em $C$ vertice do an-

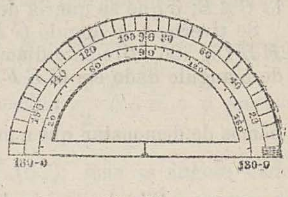


Fig. 31

gulo dado e com o mesmo raio, descreve-se outro arco de circulo que intercepta os lados do angulo nos pontos $a$ e $b$. Tomando a grandeza da corda $a\,b$, transportando-a para o primeiro arco, de modo que um dos extremos esteja no ponto em que o arco intercepta a recta, e unindo o outro extremo com o centro do arco, temos construido o angulo egual, visto terem por medida arcos eguaes.

66. *Por um ponto dado tirar uma parallela a uma recta.*— Seja a recta $A\,B$ e o ponto $E$ (fig. 12); baixando d'este ponto a perpendicular $E\,F$ sobre a recta dada, e tirando pelo ponto $E$ a perpendicular $C\,D$ a $E\,F$, a recta $C\,D$ é parallela a $A\,B$ (35).

Póde resolver-se este problema por outro processo: seja $A\,B$ a recta e $H$ o ponto (fig. 13); tirando por $H$ a recta $E\,F$, faz-se n'este ponto um angulo $G\,H\,D$ egual a $E\,G\,B$, e temos que $C\,D$ (39) será parallela a $A\,B$.

67. *O angulo inscripto tem por medida a metade do arco comprehendido pelos seus lados.*—Seja o angulo $C\,A\,B$ (fig. 23) formado por uma corda e um diametro; queremos demonstrar que este angulo tem por medida a metade de $\overset{\frown}{B\,C}$. Tire-se o diametro $G\,H$ parallelo a $A\,C$; temos o arco $\overset{\frown}{A\,G}$ egual a $\overset{\frown}{C\,H}$ (54); e como os angulos $A\,O\,G$ e $B\,O\,H$ são eguaes por serem verticalmente oppostos, temos $\overset{\frown}{A\,G} = \overset{\frown}{B\,H}$, e portanto $\overset{\frown}{C\,H} = \overset{\frown}{B\,H}$. Mas como são eguaes os angulos $C\,A\,B$ e $H\,O\,B$ (39), terão a mesma medida; e como o angulo $H\,O\,B$ tem por medida $\overset{\frown}{H\,B}$ ou $\frac{1}{2}\,\overset{\frown}{B\,C}$, será esta tambem a medida do angulo $C\,A\,B$, o que se queria demonstrar.

Se tivermos o angulo $G\,E\,H$ formado pelas cordas $E\,G$ e $E\,H$ (fig. 26), tire-se o diametro $E\,F$ ficando por elle dividido o angulo dado em $G\,E\,F$ e $F\,E\,H$. Sabemos pelo que acabámos de demonstar que a medida do angulo $G\,E\,F$ é $\frac{1}{2}\,\overset{\frown}{G\,F}$, e que a medida do angulo $F\,E\,H$ é $\frac{1}{2}\,\overset{\frown}{F\,H}$; logo a medida do angulo $GEH$ será $\frac{1}{2}\overparen{GF}+\frac{1}{2}\overparen{FH}$; isto é, metade de $GH$.

Se fôr o angulo $LMN$ formado pelas cordas $LM$ e $MN$, na posição representada na fig. 29, temos que a medida d'este angulo será tambem $\frac{1}{2}\overparen{LN}$. Tirando o diametro $MA$, a medida do angulo $LMA$ é $\frac{1}{2}\overparen{LA}$, e a do angulo $NMA$ é $\frac{1}{2}\overparen{NA}$; mas como o angulo dado $LMN=LMA-NMA$, a sua medida será $\frac{1}{2}\overparen{LA}-\frac{1}{2}\overparen{NA}$, isto é, metade de $\overparen{LN}$, o que se queria demonstrar.

Concluimos que todos os angulos que, tendo os vertices na circumferencia, interceptam com seus lados o mesmo arco ou arcos eguaes, são eguaes.

68. *O angulo que tendo o vertice na circumferencia toca com seus lados os extremos do diametro, é recto.*—Como já demonstrámos, este angulo terá por medida metade do arco intercepto pelos seus lados; logo a sua medida será metade de 180°, isto é, 90°; portanto o angulo é recto.

69. *O angulo que tem o vertice na circumferencia, e é formado por uma corda e por uma tangente, tem por medida metade do arco comprehendido entre os seus lados.*—Seja o angulo $LEH$ (fig 26), formado pela tangente $LE$ e pela corda $EH$; vamos demonstrar que este angulo tem por medida metade de $\overparen{EAH}$. Tirando o diametro $EF$ sabemos, que o angulo $LEF$ é recto (53), e tem por medida $\frac{1}{2}\overparen{EAF}$, e o angulo $FEH$ tem por medida $\frac{1}{2}\overparen{FH}$ (67); mas o angulo dado $LEH=LEF+FEH$; logo a sua medida será

$\frac{1}{2}\overset{\frown}{EAF} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{FH}$, isto é, metade de $\overset{\frown}{EAH}$, o que se pretendia demonstrar.

70. *O angulo que tem o vertice dentro do circulo, tem por medida metade da somma dos arcos comprehendidos entre seus lados e os seus prolongamentos.*— Queremos demonstrar que o angulo $A\,B\,C$ (fig. 32) tem por medida $\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{DE}$ ou $\frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{DE}}{2}$. Tire-se $D\,C$, e pelo vertice do angulo a parallela a esta recta $B\,F$; temos que os angulos $F\,B\,C$ e $E\,C\,D$ são eguaes (38) assim como os angulos $A\,B\,F$ e $A\,D\,C$ (39); logo

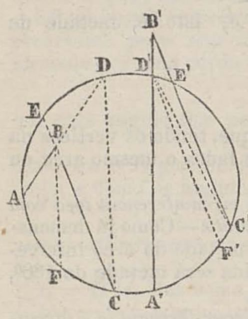

Fig. 32

$$ABF + FBC = ADC + DCE$$

ou $$ABC = ADC + ECD$$

Mas temos que a medida do angulo $A\,D\,C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$, e a do angulo $E\,C\,D = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DE}$; portanto, será a medida do angulo

$$ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{DE} \text{ ou } \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{DE}}{2},$$ o que se desejava provar.

71. *O angulo que tem o vertice fóra do circulo tem por medida metade do arco concavo menos metade do arco convexo comprehendidos entre os seus lados.*— Seja o angulo $A'\,B'\,C'$ (fig. 32); vamos demonstrar que a medida d'este angulo é

$\frac{1}{2}\overset{\frown}{A'C'} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{D'E'}$ ou $\frac{\overset{\frown}{A'C'} - \overset{\frown}{D'E'}}{2}$. Tire-se a recta $D'\,C$

e por $D'$ uma parallela a esta recta $D' F'$. Sabemos que o angulo $A' B' C' = A' D' F'$ (39), e $D' C' B' = F' D' C'$ (38); sommando ordenadamente estas egualdades temos

$$A' B' C' + D' C' B' = A' D' C'$$

Subtrahindo $D' C' B'$ a ambos os termos vem

$$A' B' C' = A' D' C' - D' C' B';$$

mas a medida do angulo $A' D' C' = \frac{1}{2} \overset{\frown}{A' C'}$ e a do angulo $D' C' B' = \frac{1}{2} \overset{\frown}{D' E'}$; será portanto a medida do angulo

$A' B' C' = \frac{1}{2} \overset{\frown}{A' C'} - \frac{1}{2} \overset{\frown}{D' E'}$ ou $\frac{\overset{\frown}{A' C'} - \overset{\frown}{D' E'}}{2}$ o que se pretendia demonstrar.

72. *Levantar uma perpendicular no extremo de uma recta.* —Seja a recta $A B$ (fig. 33); fazendo centro em um ponto qualquer $O$ e com o raio $O B$, descreve-se uma circumferencia que corta a recta em um ponto $C$; tirando o diametro $C D$, a recta $D B$, é perpendicular á recta dada, porque o angulo $C B D$ (68) é recto.

Sabendo que a tangente é perpendicular ao raio no ponto de contacto, facil é tirar uma tangente a uma circumferencia.

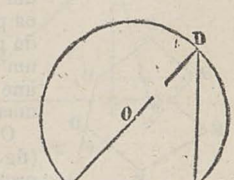

Fig. 33

## Polygonos

73. **Polygono.**—E' a figura plana terminada por linhas rectas, unidas duas a duas pelos seus extremos, de modo que fechem espaço. As linhas que terminam o polygono, chamam-se *lados;* e os pontos communs aos lados consecutivos, denominam-se *vertices*. Um polygono designa-se por lettras que se collocam nos vertices.

Os polygonos têem differentes nomes, segundo o numero dos seus lados.

Polygono de 3 lados — Triangulo ou trilatero
» de 4 » — Quadrilatero

| | | | |
|---|---|---|---|
| Polygono | de 5 | lados | — Pentagono |
| » | de 6 | » | — Hexagono |
| » | de 7 | » | — Heptagono |
| » | de 8 | » | — Octogono |
| » | de 9 | » | — Enneagono |
| » | de 10 | » | — Decagono |
| » | de 11 | » | — Endecagono |
| » | de 12 | » | — Dodecagono |
| » | de 15 | » | — Quindecagono ou pentadecagono. |
| » | de 20 | » | — Icosagono. |

Um polygono diz-se *regular* quando tem eguaes todos os seus lados e angulos.

Nos polygonos regulares o ponto egualmente afastado dos vertices denomina-se *centro do polygono*; a recta tirada do centro para qualquer vertice do polygono, denomina-se *raio do polygono*; a perpendicular baixada do centro sobre qualquer dos lados, diz-se *apothema*.

Os angulos de um polygono são *salientes* quando os prolongamentos dos lados estão fóra do polygono; assim os angulos *A, B, C, D, E, F*, (fig. 34) são salientes. Os angulos de um polygono dizem-se *re-intrantes*, quando os prolongamentos dos lados estão dentro do polygono; assim o angulo *G* (fig. 34) é um angulo re-intrante. Qualquer recta que une dois vertices, diz-se *diagonal*; *C A* é uma diagonal.

Os angulos, como, por exemplo, *H D E* (fig. 34), formados por um lado e pelo prolongamento de outro contiguo, denominam-se *angulos externos*. Os polygonos que têem numero egual de angulos re-intrantes e salientes dispostos alternadamente, denominam-se *estrellados*.

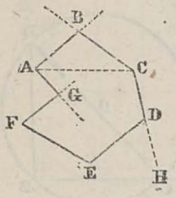

Fig. 34

Um polygono está *inscripto* n'um circulo quando tem todos os seus vertices na circumferencia; o circulo diz-se então *circumscripto ao polygono*. Um polygono está *circumscripto* a um circulo quando todos os seus lados são tangentes á circumferencia; o circulo diz-se então *inscripto no polygono*. Dá-se o nome de *perimetro* á somma dos comprimentos de todos os lados do polygono; as figuras que têem egual perimetro, dizem-se *isoperimetras*.

O menor numero de rectas que podem fechar um espaço ou limitar uma porção de superficie plana, são tres; temos, portanto, que o polygono com menor numero de lados é o triangulo.

74. **Triangulos.**— Denominam-se os triangulos (fig. 35), emquanto aos lados, *equilatero* ($A$), *isosceles* ($B$), ou *scaleno* ($C$), se tem todos os lados eguaes, só dois eguaes ou todos deseguaes. Emquanto á natureza dos angulos, são *rectangulos* ($D$), *obtusangulos* ($E$), ou *acutangulos* ($F$), se tem um angulo recto, um angulo obtuso, ou se todos os tres angulos são agudos. Chama-se *altura* de um triangulo, a perpendicular baixada de um dos vertices sobre um dos lados a que se dá o nome de *base*. No triangulo rectangulo, os lados que formam o angulo recto denominam-se *cathetos*, e o lado opposto *hypothenusa*.

75. *Em um triangulo, qualquer lado é menor do que a somma dos outros dois e maior do que a sua differença.*— Suppondo que no triangulo $A B C$ (fig. 36) o lado $A B$ é maior que $A C$ e este maior que $B C$, temos (4)

$$\left.\begin{array}{l} A B < A C + B C \\ A C < A B + B C \\ B C < A B + A C \end{array}\right\} \text{d'onde tiramos:} \left\{\begin{array}{l} A B > A C - B C \\ A C > A B - B C \\ B C > A B - A C \end{array}\right.$$

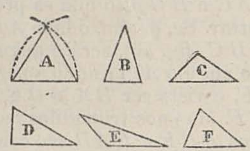

Fig. 35

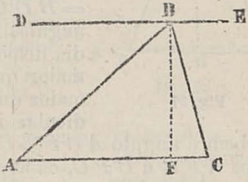

Fig. 36

Comparando as desegualdades, concluimos:

$$A B \begin{array}{l} < A C + B C \\ > A C - B C \end{array}$$
$$A C \begin{array}{l} < A B + B C \\ > A B - B C \end{array}$$
$$B C \begin{array}{l} < A B + A C \\ > A B - A C \end{array}$$

o que se desejava provar.

76. *A somma dos tres angulos de um triangulo é egual a dois rectos.*— Temos o triangulo $A B C$ (fig. 36); para demonstrar que a somma dos tres angulos d'este triangulo é egual a dois rectos, tire-se $D E$ parallela a $A C$. Sabemos que o angulo $B A C = D B A$ e $B C A = C B E$ (38).

mas como $D B A + A B C + C B E = 2 r$ (21)

logo $B A C + B C A + A B C = 2 r$

o que se pretendia demonstrar.

77. Conhecemos, portanto, a grandeza de um dos angulos do triangulo equilatero, que tem $60^{\circ}$, visto serem todos eguaes; assim podemos tambem conhecer o valor de um angulo em um triangulo quando forem conhecidos os outros dois. Se dois angulos de um triangulo forem respectivamente eguaes a $112^{\circ}$ e $32^{\circ}$, o terceiro angulo terá $36^{\circ}$, visto a somma dos tres angulos ser egual a $180^{\circ}$. Se $54^{\circ}$ fôr o valor de um dos angulos agudos de um triangulo rectangulo, o outro angulo terá $36^{\circ}$. Pelo que acima dissemos, concluimos que um triangulo não póde ter mais do que um angulo recto, nem mais do que um angulo obtuso, nem um recto e um obtuso.

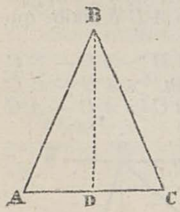

Fig. 37

78. *Em um triangulo, a lados eguaes oppõem-se angulos eguaes, e ao lado maior angulo maior.*— Seja o triangulo $ABC$ no qual o lado $AB = BC$ (fig. 37); vamos provar que o angulo $A$ é egual ao angulo $C$. Tirando $BD$ perpendicular a $AC$, o angulo $ABD = DBC$, e o angulo $BDA = BDC$; logo serão tambem eguaes os angulos $BAC$ e $BCA$, o que se pretendia demonstrar. Se, porêm, o lado $AB$ fôr maior que $BC$ (fig. 36), será o angulo $C$ maior que o angulo $A$. Tirando a perpendicular $BF$, e visto ser $BA > BC$, será tambem o angulo $ABF > CBF$. Mas nos triangulos rectangulos $AFB$ e $BFC$, os angulos $ABF$ e $FAB$ são complementares, assim como os angulos $CBF$ e $FCB$; ora, como sabemos, $ABF > CBF$; logo teremos os seus complementos $FAB < FCB$, o que se pretendia demonstrar.

79. *Dois triangulos são eguaes quando um lado de um é egual a um lado do outro, e dois angulos do primeiro respectivamente eguaes a dois angulos do segundo.*— Visto os triangulos terem dois angulos de um eguaes a dois angulos do outro, os terceiros angulos serão tambem eguaes. Ajustando os lados eguaes dos dois triangulos e os planos d'estes, visto serem eguaes os angulos, os outros lados ajustam-se tambem, o que demonstra serem eguaes.

80. *Dois triangulos são eguaes, quando dois lados de um são respectivamente eguaes a dois lados do outro, e eguaes os angulos por elles formados.*— Demonstra-se este caso do mesmo modo que o antecedente, isto é, por sobreposição.

81. *Dois triangulos são eguaes, quando dois lados de um são respectivamente eguaes a dois lados do outro, e egual o angulo opposto ao maior d'elles.*— Demonstra-se este principio por so-

breposição, com o auxilio do que dissemos no numero 28.

82. *Dois triangulos são eguaes quando os tres lados de um são respectivamente eguaes aos tres lados do outro.*—Sejam os triangulos $A\bar{B}\,C$ e $A'B'\,C'$ (fig. 38), nos quaes $AB = A'\,B'$, $B\,C = B'\,C'$ e $A\,C = A'\,C'$. Para se demonstrar a egualdade dos triangulos dados, não se póde n'este caso empregar o methodo de sobreposição, por não ser conhecida a egualdade dos angulos. Ajustando o lado $A'\,C'$ sobre $A\,C$ e assentando o plano do triangulo $A'\,B'\,C'$ no plano do triangulo $A\,B\,C$ de maneira que o vertice $B'$ fique para a parte inferior de $A\,C$, tire-se a recta $B\,B''$; e, visto ser $AB = A\,B''$ e $B\,C = B''\,C$, a recta $A\,C$ será perpendicular ao meio de $B\,B''$, e serão eguaes os angulos $B\,C\,A$ e $B''\,C\,A$ ou $B\,C\,A = B'\,C\,A'$, d'onde se conclue a egualdade dos triangulos.

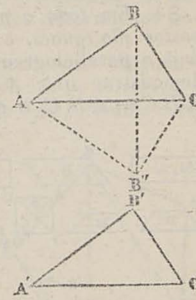

Fig. 38

83. **Quadrilateros.**—O polygono de quatro lados ou a figura plana limitada por quatro linhas rectas, denomina-se *quadrilatero*. A figura 39 representa differentes quadrilateros que recebem os seguintes nomes:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Quadrilatero | $A$ | Parallelogrammo | rectangulo |
| » | $B$ | » | obliquangulo |
| » | $C$ | Trapezio | rectangulo |
| » | $D$ | » | isosceles |
| » | $E$ | » | scaleno |
| » | $F$ | Quadrado | |
| » | $G$ | Rhombo ou losango | |

*Parallelogrammo* é o quadrilatero que tem os lados parallelos. Quando o parallelogrammo tem os angulos rectos, chama-se *rectangulo*; no caso contrario, *obliquangulo*; e se tem os lados eguaes, *rhombo* ou *losango*. *Trapezio* é o quadrilatero que tem só dois lados parallelos; estes lados chamam-se *bases*. *Trapezio rectangulo* é o trapezio em que um dos lados não parallelos é perpendicular ás bases. *Trapezio isosceles* é o que tem os lados obliquos eguaes. *Trapezio scaleno* é o que tem os lados obliquos deseguaes. *Quadrado* é o rectangulo que tem os lados eguaes. As linhas $AB$ e $CD$ (fig 39), são diagonaes do quadrado; $EF$ e $HI$ diagonaes do rhombo ou losango. Estas linhas são bi-sectrizes dos angulos $A$, $B$, $C$ e $D$ do quadrado e dos angulos $E$, $F$, $H$, $I$ do rhombo; as diagonaes do quadrado têem a particularidade de ser eguaes e perpendiculares entre si. A perpendicular tirada de qualquer ponto de um dos lados de um parallelogrammo, ou de um dos lados parallelos de um trapezio, sobre o lado opposto ou sobre o seu prolongamento, denomina-se *altura* do parallelogrammo ou do trapezio. Os quadrilateros indicam-se pelas lettras dos vertices ou sómente pelas dos vertices de dois angulos oppostos.

84. *Em todo o parallelogrammo os lados e os angulos oppostos são eguaes, e os angulos contiguos são supplementos.*—Seja o parallelogrammo $ABCD$ ou $AC$ (fig. 40); deseja-se demonstrar que $AB = CD$ e $AD = BC$, que o angulo $ABC = ADC$, e que os angulos $ABC$ e $BCD$ são sup-

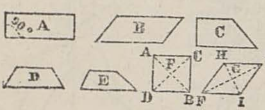

Fig. 39

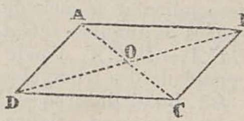


Fig. 40

plementos. Tire-se a diagonal $BD$; temos assim o parallelogrammo dividido em dois triangulos que são eguaes (79), porque têem um lado commum $BD$, e o angulo $DBA = BDC$ e $ADB = DBC$ (38); logo $AD = BC$ e $AB = CD$. Para se demonstrar que os angulos oppostos são eguaes, sabemos que o angulo $DBA = BDC$ e $DBC = ADB$; sommando estas egualdades, temos: $DBA + DBC = BDC + ADB$, ou $ABC = ADC$. Para se provar que os angulos contiguos são supplementos, temos: $ABC + BCA + CAB = 180^0$, (76); mas $CAB = ACD$, logo $ABC + BCD = 180^0$; isto é, os angulos $ABC$ e $BCD$ são supplementos.

85. *Em todo o parallelogrammo as diagonaes cortam-se em duas partes eguaes.*—Seja o parallelogrammo $ABCD$ (fig. 40); tirem-se as diagonaes $AC$ e $BD$, para se demonstrar que $AO = CO$ e $BO = DO$; temos que visto ser $AB = DC$ (pelo que acima se provou), e $OAB = OCD$, $OBA = ODC$, os triangulos $AOB$ e $DOC$ são eguaes (79); logo (78) conclue-se o que se pretendia demonstrar.

86. *Dois parallelogrammos são eguaes quando dois lados contiguos de um são eguaes a dois contiguos do outro, e o angulo por elles formado tambem egual.*—Este principio demonstra-se facilmente por sobreposição, começando por se ajustar

os vertices e um dos lados dos angulos eguaes, e recorrendo depois ao que já se demonstrou no principio (36).

87. Pelo que acima dissemos, concluimos, que um parallelogrammo fica determinado por dois lados contiguos e um angulo por elles formado. Um rectangulo fica determinado por dois lados contiguos, porque o angulo por elles formado é conhecido, visto ser recto. Um rhombo ou losango fica determinado por um lado e um angulo, porque o outro lado do angulo é egual ao primeiro. Um quadrado fica determinado por um lado.

88. **Propriedade dos polygonos.**— *O numero de diagonaes de um polygono, tiradas com a condição de não se cortarem, é egual ao numero de lados menos tres, ficando o polygono dividido em tantos triangulos, quantos os lados menos dois.*—Seja o polygono $ABCDE$ (fig. 41); tirem-se as diagonaes $AC$ e $AD$, designando por $n$ o numero de lados do polygono, vamos provar que o numero de diagonaes é $n-3$, e o numero de *triangulos* em que o polygono fica dividido é $n-2$. Como se vê na figura, temos diagonaes para todos os vertices, menos para $E$, $A$ e $B$; mas, como em um polygono o numero de vertices é egual ao numero de lados, conclue-se que o numero de diagonaes é egual a $n-3$; e, como cada diagonal é commum a dois triangulos, o numero d'estes será o numero de diagonaes mais um, ou $n-2$, o que se pretendia demonstrar.

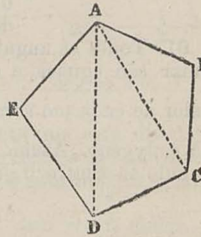

Fig. 41

89. *A somma dos angulos internos de um polygono é egual a tantas vezes dois rectos quantos são os seus lados menos dois.* —Dividindo o polygono em triangulos, a somma de todos os angulos do polygono é a mesma que a de todos os angulos dos triangulos; mas os tres angulos de um triangulo valem dois rectos (76); logo devem tomar-se tantas vezes dois rectos, quantos são os mesmos triangulos, isto é, $2r \times (n-2)$.

Assim, dando a $n$ differentes valores segundo o numero de lados dos polygonos, e sabendo que $2r$ equivale a $180^0$, temos que

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a somma dos angulos de um | triangulo | vale | $180^0$ | ou | $2r$ |
| » | quadrilatero | » | $360^0$ | » | $4r$ |
| » | pentagono | » | $540^0$ | » | $6r$ |
| » | hexagono | » | $720^2$ | » | $8r$ |
| » | octogono | » | $1:080^0$ | » | $12r$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a somma dos angulos de um | enneagono | vale $1260^0$ | ou | $14\,r$ |
| » | decagono | » $1440^0$ | » | $16\,r$ |
| » | dodecagono | » $1800^0$ | » | $20\,r$ |
| » | pentadecagono | » $2340^0$ | » | $26\,r$ |

90. O valor de qualquer dos angulos internos de um polygono regular, visto serem todos eguaes, obtem-se pela formula $\frac{2-r \times (n-2)}{n}$. Assim:

| | | |
|---|---|---|
| cada angulo de um | triangulo equilatero | vale $60^0$ |
| | quadrado | » $90^0$ |
| | pentagono regular | » $108^0$ |
| | hexagono » | » $120^0$ |
| | octogono » | » $135^0$ |
| | decagono » | » $144^0$ |
| | dodecagono » | » $150^0$ |

91. Todos os angulos formados no centro do polygono regular são eguaes, e como a somma de todos é $360^0$ (22), o valor de cada um será $\frac{360^0}{n}$, designando $n$ o numero de lados do polygono. Assim temos que:

| | | |
|---|---|---|
| angulo ao centro de um | triangulo equilatero | vale $120^0$ |
| » | quadrado | » $90^0$ |
| » | pentagono regular | » $72^0$ |
| » | hexagono » | » $60^0$ |
| » | octogono » | » $45^0$ |
| » | decagono » | » $36^0$ |
| » | dodecagono » | » $30^0$ |

92. *A somma dos angulos externos de um polygono é egual a quatro rectos.*—Sabemos que a somma dos angulos internos de um polygono é egual a $2\,r\,(n-2)$; mas cada angulo interno é supplemento do externo adjacente; logo a somma de cada angulo interno com o externo adjacente será egual a $2\,r$; e portanto $2\,r\,n$, será a somma de todos os internos e externos; subtrahindo a esta expressão o valor dos angulos internos temos a somma dos angulos externos, isto é:

$$2\,r\,n - 2\,r\,(n-2) = 2\,r\,n - 2\,r\,n + 4\,r = 4\,r$$

o que se pretendia demonstrar.

## LINHAS PROPORCIONAES

93. As linhas dizem-se proporcionaes, quando, referidas ellas á mesma unidade, os numeros que designam os seus comprimentos estiverem em proporção. Nas quatro li-

nhas rectas $AB$, $CD$, $EF$, $GH$ (fig. 42), suppondo que a unidade se contêm quatro vezes em $AB$, duas em $CD$, seis em $EF$ e tres em $GH$, temos a proporção $\frac{4}{2} = \frac{6}{3}$, e assim determinamos egualmente a proporção $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$. Os numeros 4, 2, 6, 3 formam proporção, quando o producto dos numeros collocados nos extremos 4 e 3, é egual ao producto dos numeros 2 e 6. Temos, pois, n'uma proporção quatro termos e podemos determinar a *meia*, *terceira* ou *quarta proporcional;* assim a recta $GH$, é a quarta proporcional ás rectas $AB$, $CD$ e $EF$. Dá-se o nome de *segmentos* ás porções de uma recta que está dividida em duas partes por um ponto. Os segmentos são additivos quando a recta é egual á sua somma, e subtractivos quando é egual á sua differença.

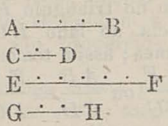

Fig. 42

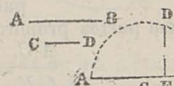

Fig. 43

94. *Construir a meia proporcional a duas rectas dadas.*— Sejam as rectas dadas $AB$ e $CD$ (fig, 43); trace-se uma linha $AF = AB + CD$, e faça-se $AE = AB$. Divida-se pelo ponto $C$ a linha $AF$ ao meio, e descreva-se uma semi-circumferencia com o raio $CA$, que intercepte a perpendicular levantada n'um ponto $E$ sobre $AF$, em $D$; $ED$ é a meia proporcional; isto é, $\frac{AE}{DE} = \frac{DE}{EF}$ ou $\frac{AB}{DE} = \frac{DE}{CD}$, porque a perpendicular baixada de um ponto da circumferencia para o diametro é meia proporcional aos segmentos do diametro.

95. *Construir a terceira proporcional a duas rectas dadas.* —Sejam as rectas dadas $AB$ e $CD$ (fig. 44); faça-se o angulo recto $AED$, sendo $AE = AB$ e $ED = CD$; unindo o ponto $A$ com $D$, levante-se ao meio de $AD$ a perpendicular $GH$, e com o centro em $H$ e raio $HA$ descreva-se uma semi circumferencia que intercepte o prolongamento de $AE$ n'um ponto $F$; $EF$ é a terceira proporcional. Temos, pois, que o angulo $ADF$ é recto; e, como a perpendicular baixada do vertice do angulo recto de um triangulo rectangulo é meia proporcional entre os segmentos da hypothenusa, vem

$$\frac{AE}{DE}=\frac{DE}{EF} \text{ ou } \frac{AB}{CD}=\frac{CD}{EF}$$

96. *Construir a quarta proporcional a tres rectas dadas.*— Sejam as rectas dadas $AB$, $CD$ e $EF$ (fig. 45); construindo um angulo com as linhas indefinidas $AX$ e $AY$, faça-se $AC=AB$, $CE=CD$ e $AF=EF$, unindo os pontos $C$ e $F$ tire se por $E$ uma recta $EG$ parallela a $CF$; $FG$ é a quarta proporcional ás tres rectas dadas; porque no triangulo $EAG$ a recta $CF$ parallela ao lado $EG$ divide os outros dois em partes proporcionaes; assim temos

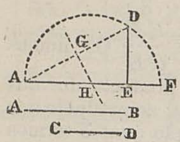

Fig. 44

$$\frac{AC}{CE}=\frac{AF}{FG} \text{ ou } \frac{AB}{CD}=\frac{EF}{FG}$$

97. *Dividir uma recta em média e extrema razão.*— Seja a recta dada $AB$ (fig. 46); no extremo $B$ d'esta recta levante-

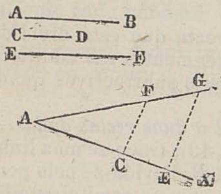

Fig. 45

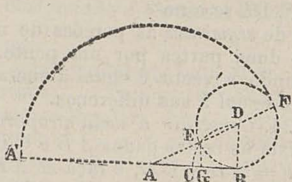

Fig. 46

se a perpendicular $BD=AC$ metade de $AB$; fazendo centro em $D$ e com o raio $DB$ descreva-se uma circumferencia, e unindo o extremo $A$ da recta com $D$ e prolongando a linha, determinam-se na circumferencia os pontos $EF$. Fazendo centro em $A$ e com os raios $AE$ e $AF$, descrevam-se arcos de circulo que interceptem a recta dada $AB$ e o seu prolongamento nos pontos $G$ e $A'$; assim, por estes pontos temos dividida a recta em média e extrema razão; isto é, $AG$ é meia proporcional a $AB$ e $GB$, e $A'A$ é meia proporcional a $AB$ e $A'B$, ou

$$\frac{AB}{AG}=\frac{AG}{GB} \text{ e } \frac{AB}{A'A}=\frac{A'A}{A'B}$$

98. **Polygonos similhantes.**—Dá se o nome de polygonos similhantes aos que teêm o mesmo numero de lados, angulos eguaes e constante a relação entre os lados homologos.

*Vertices homologos* são os determinados pela intersecção de lados homologos.

*Diagonaes homologas* são as que unem vertices homologos.

*Lados homologos* são os que, em polygonos similhantes, estão similhantemente dispostos.

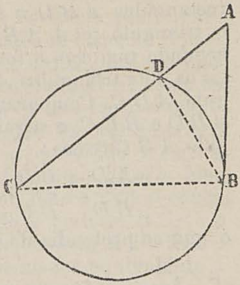

Fig. 47

99. Os triangulos dizem-se similhantes quando são equiangulos entre si, e os seus lados homologos, isto é, os que se oppõem a angulos eguaes, são proporcionaes.

100. *Tirando de um mesmo ponto fóra de um circulo uma tangente e uma secante, será a tangente meia proporcional entre a secante e a sua parte exterior.*—Seja a tangente $AB$ e a secante $AC$ (fig. 47); queremos demonstrar que $\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{AD}$

Tirando as cordas $BD$ e $BC$ temos que os triangulos $ABC$ e $ABD$ são similhantes, porque têem o angulo em $A$ commum e eguaes os angulos $ACB$ e $ABD$ (67 e 69). Segue-se pelo que acima dissemos que $\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{AD}$, o que se pretendia demonstrar.

101. *A perpendicular abaixada do vertice do angulo recto de um triangulo rectangulo sobre a hypothenusa, é meia proporcional entre os segmentos da mesma hypothenusa. Cada lado do angulo recto é meia proporcional entre a hypothenusa e o segmento correspondente.*—Seja o triangulo rectangulo $ABC$ (fig. 48) e $BD$ a perpendicular tirada do vertice do angulo recto $B$, sobre a hypothenusa $AC$; vamos demonstrar que

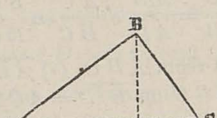

Fig. 48

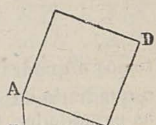

Fig. 49

$\frac{AD}{BD}=\frac{BD}{DC}$ e que $\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{AD}$ e do mesmo modo $\frac{AC}{BC}=\frac{BC}{DC}$.

A perpendicular $BD$ sobre $AC$ determina dois triangulos rectangulos $A\,B\,D$ e $B\,D\,C$; o primeiro d'estes triangulos e o triangulo total $A\,B\,C$, têem commum o angulo em $A$; e o segundo tem com o total $A\,B\,C$ o angulo em $C$ commum; logo os dois triangulos $A\,B\,D$ e $B\,D\,C$ são similhantes ao triangulo $A\,B\,C$. Comparando os lados homologos dos triangulos $A\,B\,D$ e $B\,D\,C$, e seguidamente cada um d'estes com o triangulo $A\,B\,C$ temos:

$$\frac{A\,D}{B\,D}=\frac{B\,D}{D\,C};\ \frac{A\,C}{A\,B}=\frac{A\,B}{A\,D}\ \text{e}\ \frac{A\,C}{B\,C}=\frac{B\,C}{D\,C}$$

o que se pretendia demonstrar, concluindo-se que a perpendicular tirada do vertice do angulo recto de um triangulo rectangulo sobre a hypothenusa, divide o triangulo em dois, que são similhantes entre si, e ao total.

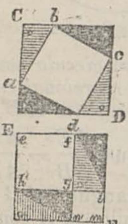

Fig. 50

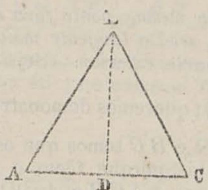

Fig. 51

102. *Em um triangulo rectangulo o quadrado da hypothenusa é egual á somma dos quadrados dos cathetos.*—Seja o triangulo rectangulo $A\,B\,C$ (fig. 48); tire-se a perpendicular $B\,D$; pelo que acabámos de demonstrar no principio antecedente, temos:

$$\frac{A\,C}{A\,B}=\frac{A\,B}{A\,D}\ \text{e}\ \frac{A\,C}{B\,C}=\frac{B\,C}{D\,C}$$

temos o quadrado da recta $A\,B$ ou (*) $\overline{A\,B^2}=A\,C\times A\,D$, e o quadrado da recta $B\,C$ ou $\overline{B\,C^2}=A\,C\times D\,C$; sommando as egualdades, teremos

$$\overline{A\,B^2}+\overline{B\,C^2}=A\,C\times A\,D+A\,C\times D\,C$$
$$\overline{A\,B^2}+\overline{B\,C^2}=A\,C\ (A\,D+D\,C)$$
$$\overline{A\,B^2}+\overline{B\,C^2}=\overline{A\,C^2},$$

d'onde se conclue o que se pretendia demonstrar.

Póde-se demonstrar este principio do seguinte modo: seja

(*) $\overline{A\,B}^2$ designa o quadrado da recta $A\,B$; isto é, a segunda potencia do numero que representa a medida d'essa linha.

o triangulo rectangulo $A\,B\,C$ (fig. 49); cortando quatro cartões eguaes a este triangulo e collocando os como se representa na fig. 50, no quadrado $C\,D$, e se dermos aos mesmos cartões a disposição que se vê no quadrado $E\,F$, como os quadrados $C\,D$ e $E\,F$ são eguaes, e os quatro cartões collocados dentro de cada um d'elles são todos eguaes ao triangulo rectangulo $A\,B\,C$, segue-se que o quadrado $a\,b\,c\,d$ é equivalente á somma dos quadrados $e\,f\,g\,h$ mais $g\,l\,m\,n$. Mas o primeiro d'estes quadrados tem por lado a hypothenusa $A\,C$; o quadrado $e\,f\,g\,h$ tem por lado o catheto $B\,C$; e o quadrado $g\,l\,m\,n$ tem por lado o outro catheto $A\,B$; logo o quadrado construido sobre a hypothenusa é equivalente á somma dos quadrados construidos sobre os cathetos.

103. Do principio que acabámos de demonstrar, pelo qual concluimos (fig. 49) que

$$\overline{A\,C}^2 = \overline{A\,B}^2 + \overline{B\,C}^2 \qquad \text{(a)}$$

tiramos

$$A\,C = \sqrt{\overline{A\,B}^2 + \overline{B\,C}^2}$$

isto é, a hypothenusa de um triangulo rectangulo é egual á raiz quadrada da somma dos quadrados dos cathetos. Tirando da expressão (a) o valor de cada um dos cathetos, temos:

$$A\,B = \sqrt{\overline{A\,C}^2 - \overline{B\,C}^2}$$

e

$$B\,C = \sqrt{\overline{A\,C}^2 - \overline{A\,B}^2}$$

isto é, um catheto é egual á raiz quadrada da hypothenusa, menos o quadrado do outro catheto.

104. Podemos com os principios já demonstrados *calcular a altura e o lado de um triangulo equilatero.*— Seja o triangulo equilatero $A\,B\,C$ (fig. 51), tire-se a sua altura $B\,D$, e temos no triangulo rectangulo $A\,B\,D$ (101) $\overline{B\,D}^2 = \overline{A\,B}^2 - \overline{A\,D}^2$ (a); mas como $A\,D = D\,C$, será $A\,D = \frac{A\,C}{2}$ ou $\frac{A\,B}{2}$ porque todos os lados do triangulo são eguaes; temos, pois, que $\overline{A\,D}^2 = \frac{\overline{A\,B}^2}{4}$; substituindo na expressão (b) teremos

$$\overline{B\,D}^2 = \overline{A\,B}^2 - \frac{\overline{A\,B}^2}{4} = \frac{\overline{A\,B}^2 \times 4 - \overline{A\,B}^2}{4} = \frac{\overline{A\,B}^2 \times 3}{4}$$

$$B\,D = \sqrt{\frac{\overline{A\,B}^2 \times 3}{4}} = \frac{A\,B}{2}\sqrt{3}$$

Designando $B\,D$ (altura do triangulo) por $h$ e o lado $A\,B$ por $l_3$ (que se lê $l$ indice 3), temos:

$$h = \frac{l_3}{2}\sqrt{3} \text{ ou } h = l_3 \times 0{,}866$$

visto ser 0,866 metade da raiz quadrada de 3.

Para se calcular o lado do triangulo equilatero, da expressão:

$$h = \frac{l_3}{2}\sqrt{3}$$

tira-se

$$l_3 = \frac{2h}{\sqrt{3}}$$

$$l_3\sqrt{3} = 2h$$

$$l_3\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 2h \times \sqrt{3}$$

$$3l_3 = 2h \times \sqrt{3}$$

$$l_3 = \frac{2}{3}h\sqrt{3}$$

105. *Calcular a diagonal do quadrado em funcção do lado.* —Seja o quadrado $ABCD$ (fig. 39); temos no triangulo rectangulo $ADB$ que (101)

$$\overline{AB^2} = \overline{AD^2} + \overline{DB^2} \text{ ou } AB = \sqrt{\overline{AD^2} + \overline{DB}^2}$$

mas como $AD = DB$ (83)

temos $AD = \sqrt{2\overline{AD^2}}$ e $AB = AD\sqrt{2}$

Designando por $D$ a diagonal e por $l_4$ o lado do quadrado, temos $D = l_4\sqrt{2}$, d'onde se conclue que a diagonal de um quadrado é egual ao lado multiplicado pela raiz quadrada de 2 ou por 1,414.

106. *Os polygonos similhantes são divididos pelas suas diagonaes no mesmo numero de triangulos similhantes e similhantemente dispostos.*—Sejam os polygonos similhantes $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ (fig. 52); tirem-se as diagonaes $AC$, $A'C'$, $AD$ e $A'D'$. Como têem egual numero de lados os polygonos $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$, ficarão divididos pelas diagonaes em egual numero de triangulos (88); e o triangulo $ABC$ será similhante ao triangulo $A'B'C'$ (99) visto ser o angulo $B = B'$ e

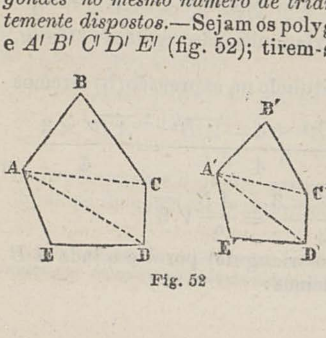

Fig. 52

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$ O triangulo $ACD$ será tambem similhante a $A'C'D'$; demonstrada a similhança dos dois triangulos $ABC$ e $A'B'C'$, temos que (a) $\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ e que os angulos $BCA$ e $B'C'A'$ são eguaes; mas, como os angulos $BCD$ e $B'C'D'$ são tambem eguaes (98), tirando do primeiro $BCA$ e do segundo $B'C'A'$, temos que o angulo $ACD = A'C'D'$. Pela similhança dos polygonos, tiramos $\frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$ e comparando-a com (a) temos: $\frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'}$; e, como são eguaes os angulos $ACD$ e $A'C'D'$, temos demonstrada a similhança dos segundos triangulos que considerámos, e do mesmo modo se provaria a similhança dos triangulos $ADE$ e $A'D'E'$.

Facilmente se póde demonstrar a reciproca d'este principio, isto é, que dois polygonos são similhantes quando se dividirem em egual numero de triangulos similhantes e similhantemente dispostos.

107. *Construir um polygono similhante a outro dado.*— Seja o polygono $ABCDE$ e dê-se o lado $A'B'$ homologo de $AB$ (fig. 52). No extremo $B'$ da recta $A'B'$ construa-se o angulo $A'B'C'$ egual a $ABD$ e determine-se $B'C'$ que será a quarta proporcional ás rectas $AB$, $A'B'$ e $BC$ (96); no extremo $C'$ construa-se o angulo $B'C'D'$ egual a $BCD$ e determine-se $C'D'$ que será a quarta proporcional ás rectas $AB$, $A'B'$ e $CD$; em $D'$ construa-se o angulo $C'D'E'$ egual a $CDE$ e determine-se $D'E'$, a quarta proporcional ás rectas $AB$, $A'B'$ e $DE$; unindo $E'$ com $A'$, temos formado o polygono $A'B'C'D'E'$ similhante ao polygono dado $ABCDE$.

108. Ha instrumentos destinados á resolução d'este problema, como o compasso de reducção e o compasso pyramidal de reducção devido a D. Martinho da França Pereira Coutinho, os quaes se empregam com vantagem na construcção dos polygonos similhantes.

109. *O compasso de reducção* (fig. 53) consta de duas hastes eguaes, terminadas por pontas de aço cortadas por duas fendas no sentido do seu comprimento, dentro das quaes se ajustam duas chapas atravessadas por um parafuso. Os compassos de reducção graduados têem uma ou ambas as hastes,

divididas por traços transversaes com os numeros $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$, $^1/_7$, $^1/_8$, $^1/_9$; e a peça movel tem tambem um traço no mesmo sentido, que se chama *linha-de-fé*. Conservando-se immovel o parafuso (que designaremos por ponto $O$), com qualquer abertura do compasso, a relação entre $A' B'$ e $A B$ é sempre constante e egual á relação das distancias $A' O$ e $A O$, ou $B' O$ e $B O$; isto é, $\frac{A' B'}{A B} = \frac{A' O}{A O}$ ou $\frac{B' O}{B O}$

Para se construir um polygono similhante a $A B C D E$ (fig. 52), fixada a posição do parafuso de modo que a relação das distancias $A B$ e $A' B'$ seja a que se desejar, as extremidades $A$ e $B$ do compasso vão-se collocando successivamente em $A B$, $B C$, $C D$ e $D E$, produzindo as extremidades $A'$ e $B'$, as grandezas $A' B'$, $B' C'$, $C' D'$ e $D' E'$ que são os lados do polygono que se deseja, com os angulos $A' B' C'$, $B' C' D'$ etc., respectivamente eguaes a $A B C$, $B C D$, etc.

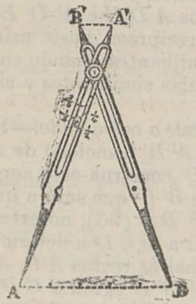

Fig. 53

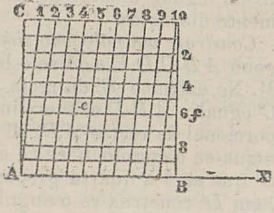

Fig. 54

Com este compasso podemos dividir uma recta em partes eguaes.

110. *Escalas.*—Comprehende-se que nem sempre será possivel desenhar um objecto, conservando-lhe as mesmas dimensões: umas vezes terá de ser representado com menores dimensões; outras, ampliando-o, para melhor idéa se poder formar do original.

Porêm, quer se pretenda copiar o original com maiores, quer ecm menores dimensões, o desenho não é mais do que uma figura e similhanto ;para bem se avaliar a grandeza do objecto desenhado, deve ser conhecida a relação de similhança entre essas duas figuras. A essa relação de similhança entre o original e o desenho dá-se o nome de *escala*. Ha escalas *numericas* e *graphicas*: as numericas são representadas por um quebrado, no qual o numerador representa o comprimento de algum dos lados do desenho; e o denominador, o dos lados homologos do objecto; as graphicas são representadas por figuras geometricas. O numerador do quebrado que representa a escala reduz-se quasi sempre á unidade. Se quizermos copiar um objecto de maneira que $0^m,04$ correspondam a $10^m$ do original, a escala será

$$\frac{0^m,04}{10^m} = \frac{4}{1000} = \frac{4:4}{1000:4} = \frac{1}{250}$$

Se quizermos construir uma escala graphica decimal, marcam-se sobre uma linha indefinida $AX$ (fig. 54) as grandezas $AB$, $B$... etc., representando cada uma d'ellas um metro. Divida-se $AB$ e $AC$ em dez partes eguaes, tirem-se rectas parallelas como representa a figura, e temos assim construida uma escala graphica decimal. Se fizermos $AB = 0^m,04$, uma grandeza do original que tiver um metro, deve ser representada no desenho egual a $0^m,04$ ou $AB$.

Segundo a natureza do desenho, e segundo se deseje uma copia mais ou menos rigorosa, assim deve ser determinada a escala; tem-se, pois, convencionado que a escala escolhida deve satisfazer á condição de que as menores grandezas que se não querem omittir correspondam a linhas do desenho que tenham mais de dois decimillimetros.

## Polygonos inscriptos e circumscriptos

111. Definimos já polygono *inscripto n'um circulo* o que tem todos os vertices na circumferencia, e *polygono circumscripto* o que tem todos os lados tangentes á circumferencia; concluimos que para um polygono poder ser inscripto n'um circulo é necessario que no polygono haja um ponto interior equidistante de todos os vertices, e para que possa ser circumscripto é necessario que haja um ponto interior equidistante de todos os lados. O triangulo tem a propriedade de se poder sempre inscrever e circumscrever a um circulo.

Os polygonos regulares podem ser inscriptos e circumscriptos no circulo; o raio do circulo inscripto é o apothema do polygono; e o raio do circulo circumscripto é o do polygono.

112. *Inscrever em um circulo um triangulo equilatero.*—Para resolver este problema tira-se o diametro $AB$ (fig. 55), e fazendo centro em $B$ e com o raio $BC$ descreve-se um arco, que intercepta a circumferencia nos pontos $D$ e $E$; unindo os pontos $D$, $A$ e $E$, temos o triangulo equilatero inscripto.

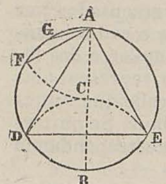

Fig. 55

Ha em muitos polygonos regulares uma relação constante entre o lado e o raio, de maneira que, conhecido este, podemos calcular o lado, assim como conhecido o lado se póde determinar o raio.

Vamos, pois, calcular a altura do triangulo equilatero e do lado em funcção do raio. Se unissemos os tres pontos $C$, $D$ e $B$ (fig. 55), teriamos o triangulo equilatero $CDB$, cuja altura divide o lado $CB$ ao meio; portanto, a altura do triangulo equilatero $DAE$ é egual a $CA$ mais metade de $CB$; isto é, designando por $h$ a altura e $r$ o raio, temos $h = \frac{3}{2} r$.

Para se calcular o lado, temos que $DE$ é egual a duas vezes a altura do triangulo $CDB$, cujo lado é egual ao raio. Essa altura é egual a $\frac{l_3}{3}\sqrt{3}$ ou $\frac{r}{2}\sqrt{3}$ (103); logo

$$l_3 = 2 \times \frac{r}{2}\sqrt{3} = r \times \sqrt{3}.$$

113. *Inscrever em um circulo um triangulo similhante a outro dado.*—Seja dado o triangulo $ABC$ e um circulo de raio $OD$ (fig. 56). Circumscreva-se ao triangulo dado uma circumferencia, e do centro $O$ com o raio $OB'$ egual a $OD$ descreva-se uma circumferencia que corta os prolongamentos de $OA$, $OB$ e $OC$ nos pontos $A'$, $B'$ e $C'$. Unindo esses pontos temos construido o triangulo $A'B'C'$ similhante ao dado $ABC$.

Se o raio da circumferencia dada foi menor que $OA$, determinam-se do mesmo modo os pontos $A''$, $B''$ e $C''$, e unindo estes pontos teriamos o triangulo $A''B''C''$ similhante a $ABC$.

114. *Inscrever em um circulo um quadrado.*—Para inscrever um quadrado em um circulo tiram-se os diametros perpendiculares, unem-se os extremos dos diametros e temos inscripto o quadrilatero pedido. Visto serem os diametros

perpendiculares, a circumferencia fica dividida em quatro partes eguaes; portanto, as cordas correspondentes a esses arcos tambem são eguaes (51) e formam quatro angulos rectos (68); logo o quadrilatero inscripto é um quadrado. Para calcularmos o lado do quadrado em funcção do raio temos designando por $l_4$ o lado que:

$$l_4 = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}.$$

115. *Inscrever em um circulo um hexagono.*—Inscrevendo um triangulo equilatero (112) e dividindo ao meio o arco $DE$ (fig. 55), a corda correspondente ao arco $DB$ é o lado do hexagono. Dividindo ao meio $\widehat{DB}$ ou $\widehat{AF}$, lados do hexagono, teriamos $AG$ lado do dodecagono; e dividindo este ao

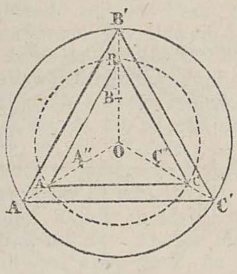

Fig. 56

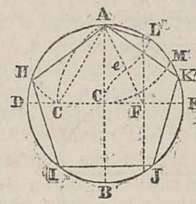

Fig. 57

meio, e assim successivamente, teriamos inscripto polygonos regulares de 3, 6, 12, 24, 48 lados, etc.

116. *O lado do hexagono regular inscripto é egual ao raio.* —Como sabemos, $AF$ é o lado do hexagono regular; se unissemos o ponto $F$ com $C$ (fig. 55), teriamos o angulo $ACF$ que é egual a $\dfrac{360^0}{6} = 60^0$ (91). E, visto ser $CF$ egual a $CA$, os angulos $CAF$ e $CFA$ serão eguaes, e cada um terá $60^0$; portanto, o triangulo $ACF$ é equilatero e $AF$ lado do hexagono regular inscripto egual a $CA$ raio do circulo. Podemos pois, sem inscrever primeiro o triangulo equilatero, determinar logo o lado do hexagono, fazendo centro em $A$ extremo do diametro, e com o raio $AC$ descrever um arco de circulo, e com o centro no outro extremo $B$ e raio $BC$ descrever outro arco de circulo. Temos assim dividida a circumferencia

em seis partes eguaes, e tirando as cordas por esses pontos de divisão fica o hexagono regular inscripto.

117. *Inscrever em um circulo um octogono regular.*— Inscripto em um circulo um polygono regular de quatro lados, dividindo ao meio os arcos correspondentes ás cordas lados do quadrado, temos dividida a circumferencia em oito partes eguaes; e unindo esses pontos de divisão por meio de rectas, temos inscripto o polygono regular de oito lados. Dividindo ao meio os arcos correspondentes ás cordas lados do octogono, e continuando assim successivamente, temos a circumferencia dividida em 16, 32, 64, etc., partes eguaes, e esses pontos são os vertices dos polygonos regulares de 16, 32, 64, etc. lados.

118. *Inscrever em um circulo um pentagono regular.*— Para

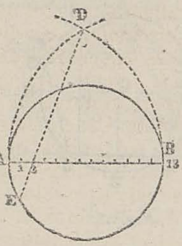

Fig. 58

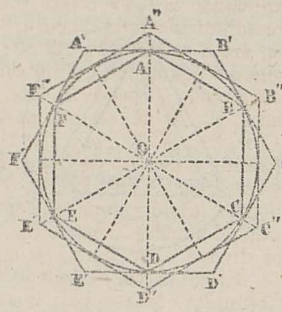

Fig. 59

inscrever em um circulo um pentagono, tirem-se os diametros perpendiculares $AB$ e $DC$ (fig. 57), e divida-se $CE$ ao meio pelo ponto $F$, fazendo centro n'este ponto e com o raio $FA$ descreve-se o arco $AC$, cuja corda é o lado do pentagono. Com o centro em $A$ e o raio $AC$ descreve-se o arco $CH$, de maneira que temos $AH$ egual a $AC$; e marcando sobre a circumferencia $HI = IJ = IK = KA = AH$ ou $AC$ temos inscripto o pentagono regular.

119. *Inscrever em um circulo um decagono.*— Fazendo centro em $F$ metade de $CE$ (fig. 57), e com o raio $FC$, descreve-se o arco $Ce$; e temos $Ae$ ou $AL$ o lado do decagono. Dividindo o arco $AL$ ao meio, e assim successivamente, a circumferencia fica dividida em 20, 40, 80, 160, etc. partes eguaes, e assim poderemos inscrever polygonos com um numero de

lados respectivamente eguaes a essas divisões. A corda do arco $LM$ (fig. 57) é o lado do quindecagono ou pentadecagono, que é egual a $AM$, (arco correspondente á corda lado do hexagono) menos $AL$ (arco correspondente á corda lado do decagono).

120. Pela inscripção dos polygonos regulares podemos determinar o numero de graus, minutos e segundos que tem qualquer arco; porêm, nem sempre se poderá dividir a circumferencia exactamente em partes eguaes ou inscrever um polygono regular de qualquer numero de lados. Inscrevendo em um circulo um triangulo equilatero e duplicando os lados d'este e assim successivamente, temos a circumferencia dividida em 3, 6, 12, 24, 48, etc. partes eguaes, ou em arcos de 120°, 60°, 30°, 15°, 7° 15', etc.; se inscrevermos o quadrado e duplicando os lados d'este, e assim successivamente, temos a circumferencia dividida em 4, 8, 16, 32, 64, etc. partes eguaes ou em arcos de 90°, 45°, 22° 30', 11° 15', 5° 37' 30'', etc.; inscrevendo o pentagono e duplicando o numero de lados d'este, e continuando successivamente, fica a circumferencia dividida em 5, 10, 20, 40, 80, etc. partes eguaes ou em arcos de 72°, 36°, 18°, 9°, 4° 30', etc.; se tivessemos o pentadecagono, e duplicando o numero de lados, ficaria a circumferencia dividida em arcos de 24°, 12°, 6°, 3°, 1° 30', etc. Concluimos que se poderá dividir uma circumferencia em partes eguaes, quando o numero d'estas fôr par e não admittir nenhum outro divisor alêm de 2, ou quando só admittir este e uma vez o divisor 3 ou 5, podendo estes dois divisores estar ou não reunidos. Não é pois possivel dividir a circumferencia em arcos de um grau, pois seria necessario dividil-a em 360 partes, e o numero 360 é divisivel duas vezes por 3 ou por 9.

121. Uma circumferencia póde ser dividida approximadamente em qualquer numero de partes eguaes, por variados processos, entre elles o seguinte: querendo, por exemplo, dividir uma circumferencia em 13 partes eguaes, divida-se o diametro $AB$ (fig. 58) em treze partes eguaes, isto é, no mesmo numero de partes em que queremos dividir a circumferencia. Fazendo centro em $A$ e $B$ e com os raios $AB$ e $BA$ descrevem-se arcos de circulo que se interceptam no ponto $D$; unindo este ponto com a divisão *dois* do diametro, temos o arco $AE$ que approximadamente é $\frac{1}{13}$ da circumferencia, e a sua corda é o lado approximado do polygono de treze lados. O erro commettido para mais no numero total de divisões é de

$6^{0}\,42'\,17''$, pois achariamos arcos de $28^{0}\,12'\,29''$ que produziriam $366^{0}\,42'\,17''$.

122. Como acima dissemos, em alguns dos polygonos regulares ha uma relação constante entre o lado e o raio, de maneira que, conhecido este, póde-se calcular o lado, assim como, conhecido o lado, podemos determinar o raio.

Designando por $l_3$, $l_4$, $l_5$, etc., o lado do triangulo, do quadrado, do pentagono, etc., temos as seguintes relações de alguns polygonos:

$$l_3 = r \times \sqrt{3}$$

$$l_4 = r \times \sqrt{2}$$

$$l_5 = \frac{r}{2} \times \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

$$l_6 = r$$

$$l_8 = r \times \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$l_{10} = \frac{r}{2} \times \left(\sqrt{5} - 1\right)$$

$$l_{12} = r \times \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$l_{15} = \frac{r \times \left[\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{3}\left(\sqrt{5} - 1\right)\right]}{4}$$

$$l_{16} = r \times \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$l_{32} = r \times \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

Para immediata applicação das formulas, temos que: $\sqrt{2} = 1{,}414$ ; $\sqrt{3} = 1{,}732$ e $\sqrt{5} = 2{,}236$.

123. Sendo conhecido o lado e o raio de um polygono regular, podemos calcular o apothema. Temos um triangulo rectangulo, em que um dos cathetos é o apothema, o outro é metade do lado e a hypothenusa é o raio; por conseguinte, designando por $a$ o apothema, $l n$ o lado do polygono e $r$ raio, temos (102)

$$r^2 = a^2 + \frac{l_n{}^2}{4} \quad \text{(a)}$$

d'onde tiramos:

$$a^2 = r^2 - \frac{l_n^2}{4} \qquad a = \sqrt{r^2 - \frac{l_n^2}{4}} \qquad a = \sqrt{4\,r^2 - \frac{l_n^2}{4}}$$

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{4\,r^2 - l_n^2}$$

Da expressão (a) tiramos:

$$\frac{l_n^2}{4} = r^2 - a^2 \qquad \frac{l_n}{2} = \sqrt{r^2 - a^2} \qquad l_n = 2\sqrt{r^2 - a^2}$$

ísto é, temos o lado quando é conhecido o apothema.

124. *Inscripto em um circulo um polygono regular, circumscrever outro de egual numero de lados.*— Seja $A\,B\,C\,D\,E\,F$ o hexagono regular inscripto (fig. 59); tirando pelos vertices d'este polygono as tangentes á circumferencia $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$, $E'F'$ e $F'A'$, temos o polygono $A'\,B'\,C'\,D'\,E'\,F'$ que é regular e está circumscripto ao circulo. Podemos por outro meio resolver o problema, tirando parallelas aos lados do polygono inscripto, como se vê na figura.

125. Para se determinar o lado do polygono circumscripto, calcula-se o lado do polygono inscripto; e substituindo este valor e o do raio na seguinte expressão:

$$x = \frac{2 \times r \times l}{\sqrt{4 \times r^2 - l^2}}$$

temos o lado do polygono circumscripto.

## Rectificação da circumferencia

126. Rectificar uma circumferencia é: determinar a sua extensão linear, quando é conhecida a grandeza do diametro. Em todas as circumferencias é constante a relação da circumferencia para o diametro, o que quer dizer que ha um numero constante que, multiplicado pelo diametro, determina o comprimento da circumferencia rectificada. Essa relação, que se designa pela lettra grega $\pi$ (que se pronuncia *pi*), não é exactamente conhecida, é representada por um numero incommensuravel. Ludolpho de Ceulen foi quem primeiramente o determinou; Adriano Metius achou a relação $\frac{355}{113}$; e a relação $\frac{22}{7}$ descoberta por Archimedes é sómente exacta até á

segunda casa decimal; porêm, o valor de $\pi$ calculado com dez casas exactas é egual a 3,1415926535. Designando por $C$ a circumferencia e por $r$ o raio, temos: $\frac{C}{2r} = \pi$, d'onde $C = 2\pi r$, o que mostra que a circumferencia se obtem multiplicando o raio pelo dobro de $\pi$; e tirando o valor do raio temos que este é egual á circumferencia dividida pelo dobro de $\pi$, isto é: $r = \frac{C}{2\pi}$.

127. Ha diversos processos para se rectificar graphicamente uma circumferencia. Um d'elles consiste no seguinte: tira-se o diametro $AF$ (fig. 60), e com o centro em $A$ (extremo do diametro) e raio $AC$ (que é o do circulo) descreve-se um arco que intercepta a circumferencia em um ponto $B$. Tirando a corda $AB$, levantando ao meio d'ella a perpendicular $CD$ até incontrar a tangente $ED$ no ponto $D$, fazendo $DE$ egual a tres vezes o raio e unindo o ponto $E$ com $F$, temos $EF$ que é egual á metade da circumferencia rectificada.

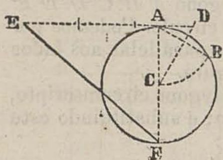

Fig. 60

128. Para se rectificar um arco $\frown{a}$, cujo numero de graus, minutos e segundos, que designamos por $n$, sendo $r$ o raio, temos a seguinte expressão:

$$\frown{a} = \pi r \times \frac{n}{180} \quad \text{porque (63)} \quad \frac{\frown{a}}{C} = \frac{n}{360}$$

$$\text{d'onde } \frown{a} = C \times \frac{n}{360}; \quad \text{mas como } C = 2\pi r \text{ (126)}$$

$$\frown{a} = 2\pi r \times \frac{n}{360} \quad \frown{a} = \pi r \times \frac{n}{180}$$

Podemos tambem da expressão achada deduzir o valor de $n$, isto é:

$$n = \frac{\frown{a} \times 180}{\pi r}$$

129. Da expressão que acabámos de calcular, sendo $a = r$ (o arco de comprimento egual ao raio), temos:

$$n = \frac{180}{\pi} = \frac{180}{3,1416} = 57^0\ 17'\ 44''$$

valor de um arco, cujo comprimento é egual ao raio.

## Areas

130. Dá-se o nome de *area* de uma figura á sua medida superficial. Medir uma area é determinar quantas vezes esta contêm outra conhecida que se considera como unidade.

131. *Figuras equivalentes* são as que têem a mesma extensão superficial. Para melhor comprehendermos as figuras que acabamos de definir, podemos com dois esquadros eguaes formar dois triangulos $A$ $B$ (fig. 61), um rectangulo $D$ e um

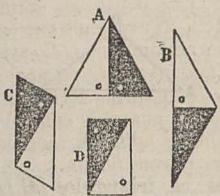


Fig. 61

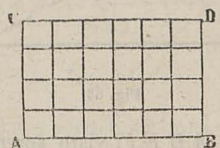


Fig. 62

parallelogrammo $C$; como se vê, todas estas figuras têem areas eguaes e com fórmas differentes; são pois equivalentes; e, sabendo medir uma, temos conhecida a medida das outras.

132. *A area de um rectangulo avalia-se multiplicando a base pela altura.*—Seja o rectangulo $A B$ $C D$ (fig. 62); se dividirmos $A B$ em seis partes eguaes e $A$ $C$ em quatro, e se cada uma d'ellas fôr egual a um metro, tirando pelos pontos de divisão parallelas a $A B$ e a $A$ $C$, temos o rectangulo dividido em 24 quadrados; isto é, $6 \times 4$ vezes o metro quadrado; assim o rectangulo, considerando a unidade de superficie o quadrado construido sobre cada uma das divisões de $A B$ e de $A$ $C$, tem tantas vezes a unidade de superficie, quantas tem o producto dos numeros que indicam quantas vezes a unidade linear é contida na base e na altura.

Temos, pois, que designando por $A$ a area de um rectangulo, $b$ a base e $h$ a altura, sae-nos $A = b \times h$; d'onde podemos deduzir $b = \frac{A}{h}$ e $h = \frac{A}{b}$.

133. *A area de um quadrado é egual á segunda potencia do seu lado.*— Sabemos que o quadrado é o quadrilatero que tem todos os lados eguaes, ou, um rectangulo que tem o lado por base e altura. Portanto, a sua area avalia-se multiplicando a base pela altura; é, pois, a segunda potencia do seu lado.

134. *A area de um parallelogramma é egual ao producto da base pela altura.*— Seja o parallelogrammo $A\,B\,D\,C$ (fig. 63); a sua area será egual a $A\,B \times B\,F$.

A area do parallelogrammo $A\,B\,C\,D$ será egual á do rectan-

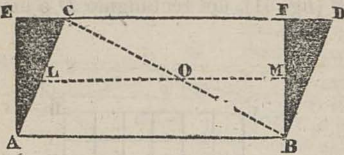


Fig. 63

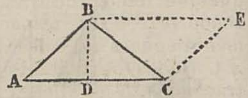


Fig. 64

gulo $A\,B\,E\,F$, visto serem eguaes os triangulos $B\,D\,F$ e $A\,C\,E$; mas, como a area do rectangulo é egual a $A\,B \times B\,F$, segue-se que será esta a area do parallelogrammo dado.

135. *Construir um quadrado equivalente a um rectangulo dado.*— Seja o rectangulo $A\,B\,C\,D$ (fig. 62); sabemos (132) que a sua area é egual a $A\,B \times A\,C$.

Designando por $x$ o lado do quadrado que se quer construir, temos $x^2 = A\,B \times A\,C$, d'onde se tira a seguinte proposição $\frac{A\,B}{x} = \frac{x}{A\,C}$; d'onde se conclue que o problema se resolve determinando a meia proporcional (94) entre $A\,B$ e $A\,C$, que é o lado do quadrado.

136. *A area de um triangulo é egual a metade do producto da base pela altura.*— Seja o triangulo $A\,B\,C$ (fig. 64); a sua area será egual a $\frac{A\,C \times B\,D}{2}$

Tirando pelo vertice $B$ uma parallela a $A\,C$ (41) e por $C$ uma parallela a $A\,B$, temos o parallelogrammo $A\,C\,B\,E$; e, visto serem eguaes os triangulos $A B C$ e $B C E$, segue-se que a area do triangulo $A B C$ é metade da area do parallelogrammo; e, como a area d'este é $A C \times B D$, será a do triangulo $\frac{A C \times B D}{2}$.

Designando por $p$ metade do perimetro de um triangulo, e por $a$, $b$ e $c$, os tres lados (sendo todos conhecidos) podemos pela seguinte formula calcular a sua area:

$$A = \sqrt{p \times (p-a) \times (p-b) \times (p-c)}$$

137. *Construir um triangulo equivalente a um rectangulo.* —Seja o rectangulo $A B C D$ (fig. 65); tire-se a recta $A B$ e divida-se ao meio pelo ponto $D$, e em $A$ com a recta $A X$ fórme-se o angulo $B A X$ de qualquer numero de graus. Fazendo $A B'$ e $A C$ respectivamente eguaes aos lados $A B$ e $A C$ (lados do rectangulo), e traçando $C E$ parallela a $D B'$, descreve-se um arco com o centro em $A$ e raio $A E$.

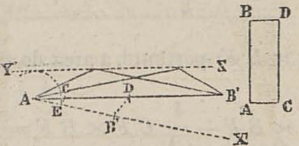

Fig. 65

Qualquer triangulo de base $A B$ e o vertice na linha $Y Z$, parallela a $A B$ e tangente ao arco de circulo, é equivalente ao rectangulo dado. Pelo que já tratámos, sabemos que:

$$\frac{A D}{A B'} = \frac{A C}{A E}; \text{ mas, como } A D = \frac{1}{2} A B$$

temos $\dfrac{\frac{1}{2} A B}{A B'} = \dfrac{A C}{A E}$ ou $A B' \times A C = \frac{1}{2} A B \times A E$

concluimos que a area do rectangulo é egual á do triangulo.

138. *Construir um triangulo equivalente a um polygono.*— Seja o polygono $A B C D E$ (fig. 66); para construir o triangulo equivalente, tire-se a diagonal $B E$ e pelo vertice $A$ uma parallela a $B E$ até incontrar o prolongamento do lado $D E$ em um ponto $F$. Temos, pois, dois triangulos equivalentes $B F E$ e $B A E$, visto terem a mesma base $B E$ e a mesma altura; logo

$$B F D E \diamondsuit A B C D E$$

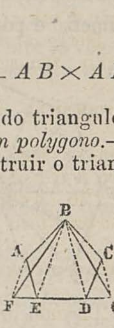

Fig. 66

Tirando a diagonal $B D$ e pelo vertice $C$

uma parallela a $B\,D$, que determina o ponto $G$, temos que são equivalentes os triangulos $B\,G\,D$ e $B\,C\,D$; logo

$$F\,B\,G \diamond B\,F\,D\,C$$

mas $$B\,F\,D\,C \diamond A\,B\,C\,D\,E$$

portanto $$F\,B\,G \diamond A\,B\,C\,D\,E$$

139. *A area de um trapezio é egual á semi-somma das bases multiplicada pela altura.*— Seja o trapezio $A\,B\,C\,F$ (fig. 63), e a sua altura $B\,F$; a area será egual a $\dfrac{AB + C\,F}{2} \times B\,F.$

Tirando a diagonal $C\,B$, temos o trapezio dividido em dois triangulos, $A\,C\,B$ e $B\,C\,F$; a area do triangulo $A\,C\,B = \dfrac{1}{2}\,AB \times B\,F$, e a do triangulo $B\,C\,F = \dfrac{1}{2}\,C\,F \times \times B\,F$; portanto, a area do trapezio $A\,B\,C\,F = \dfrac{1}{2}\,A\,B \times \times B\,F + \dfrac{1}{2}\,C\,F \times B\,F = \dfrac{A\,B + C\,F}{2} \times B\,F.$

Se dividirmos ao meio $A\,C$ pelo ponto $L$, e tirarmos $L\,M$ parallela a $A\,B$, poderemos avaliar a area do trapezio multiplicando pela sua altura a linha tirada a egual distancia dos lados parallelos.

140. *A area de qualquer polygono regular avalia-se multiplicando metade do perimetro pelo apothema.*—Seja o polygono regular $A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H$ (fig. 67); designando por $p$ o perimetro e por $a$ o apothema, temos que a area: $A = \dfrac{1}{2}\,p \times a.$

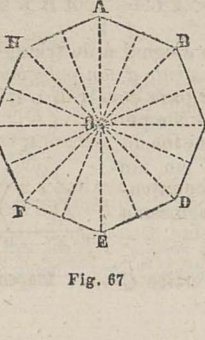

Fig. 67

Tirando os raios $O\,A$, $O\,B$, $O\,C$, $O\,D$, $O\,E$, etc., temos o polygono dividido em tantos triangulos eguaes, quantos os lados; avaliando pois a area de um dos triangulos e multiplicando-a pelo numero de lados do polygono, temos conhecida a do polygono. Mas, como a area de um dos triangulos $A\,O\,B = \dfrac{A\,B}{2} \times O\,a$ (138), designando por $n$ o numero de lados do polygono, temos que a sua area será $A = \frac{n \times AB}{2} \times Ox$ ou $A = \frac{1}{2} p \times a$.

141. *A area de um circulo avalia-se multiplicando metade da circumferencia pelo raio.* – Considerando o circulo como um polygono de numero infinito de lados, cujo apothema é o raio, temos (126) designando por A a area do circulo:

$A = \frac{2 \pi r}{2} \times r$ ou $A = \pi r^2$, isto é, a area do circulo egual a metade da circumferencia multiplicada pelo raio ou egual ao quadrado do raio multiplicado pela razão da circumferencia para o diametro.

Conhecida a area de um circulo, podemos determinar o raio; da formula $A = \pi r^2$ vem $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$.

Podemos rapidamente calcular a superficie de um circulo, sabendo que ella é equivalente ao quadrado construido sobre uma linha egual a $\frac{8}{9}$ do diametro.

142. *A area de um sector avalia-se multiplicando metade do arco pelo raio.*—Sabendo que a area do circulo se avalia multiplicando metade da circumferencia pelo raio, temos que a area do sector se avalia multiplicando metade do arco pelo raio, porque em circulos de raios eguaes as areas dos sectores são proporcionaes aos arcos, o que facilmente se vê pelo que já dissemos no numero 63. Designando por A a area, $a$ o arco rectificado, e $r$ o raio, temos $A = \frac{1}{2} a \times r$.

143. Para se avaliar a area do segmento $DFE$ (fig. 20), tirando os raios $CD$ e $CE$, avalia-se a area do sector $CDFE$, e a do triangulo $DCE$; subtrahindo esta da primeira, temos conhecida a area do segmento.

144. Com o que temos exposto, podemos avaliar a area de um polygono irregular; tendo um polygono $ABCDEFGHI$ (fig. 68), tire-se a diagonal $AF$ e sobre esta linha baixem-se as perpndiculares $Ba$, $Ib$, $Cc$, $Hd$, $De$, $Gf$ e $Eg$. O polygono fica decomposto em triangulos rectangulos e trapezios;

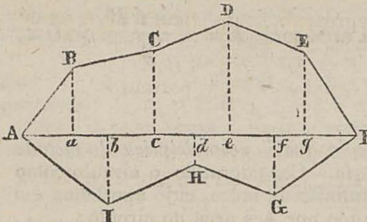

Fig. 68

medindo as perpendiculares tiradas sobre $AF$ e as distancias entre os seus pés, podemos conhecer as areas d'esses triangulos e trapezios em que o polygono está dividido, isto é, a area do polygono irregular. Seguidamente damos umas noções muito breves ácerca da ellipse, da hyperbole e da parabola.

## ELLIPSE

**145. Ellipse** é uma linha plana em que a somma das distancias de cada um dos seus pontos a dois fixos, chamados *focos,* é constante.

*Raios vectores* são as rectas tiradas de cada um dos pontos da curva para os dois focos. Assim as rectas $EF$ e $EF'$ (fig. 69) são raios vectores.

*Eixo maior* é a recta que passa pelos focos e termina na ellipse.

*Eixo menor* é a recta perpendicular ao meio do eixo maior. Temos pois que a recta $AB$ (fig. 69) é o eixo maior e $CD$ o eixo menor.

*Vertices* da ellipse são os extremos dos eixos. Os pontos $A$, $B$, $C$ e $D$ (fig. 69) são os vertices da ellipse.

*Diametro* é a recta que tem os extremos na ellipse e passa pelo centro. A linha $HN$ (fig. 69) é um diametro.

*Corda* é qualquer recta que tem os extremos na ellipse. A recta $PQ$ (fig. 69) é uma corda.

*Parametro* é a corda perpendicular ao eixo maior e que passa pelo foco. A recta $LM$ é um parametro.

*Centro* da ellipse é o ponto de intersecção dos dois eixos.

*Excentricidade* da ellipse é a relação entre a distancia do centro ao foco e o semi-eixo maior.

*Tangente* á ellipse é a recta indefinida que só toca na curva em um ponto. A recta $TT'$ (fig. 69) é uma tangente, e o ponto $E$ denomina-se *ponto de contacto* ou *de tangencia.*

*Normal* é a perpendicular á tangente no ponto de contacto.

*Circumferencia directriz* da ellipse é a que tem o centro em qualquer foco e o raio egual ao eixo maior.

**146.** ***O eixo maior da ellipse é egual á somma dos raios ve-***

*ctores.*—Dada a ellipse representada na figura 69, e sendo $A$ e $B$ pontos da ellipse, temos: $AF + AF' = BF + BF'$, ou

$$FF' + 2 \times AF = FF' + 2 \times BF'$$

d'onde se conclue ser $AF$ egual a $BF'$, e portanto

$$AF + AF' = FF' + AF + BF'$$

mas, como $FF' + AF + BF' = AB$

segue-se que: $AF + AF' = AB$

Assim temos demonstrado que o eixo maior é egual á somma dos raios vectores.

147. *A somma das distancias aos dois focos de qualquer ponto situado fóra da ellipse é maior que a somma constante dos raios vectores, e menor quando o ponto está dentro da ellipse.* —Se considerarmos o ponto $G$ exterior á ellipse (fig. 69), e unindo esse ponto com os focos e o ponto $E$ com $F'$, temos: $EG + GF' > EF'$; addicionando a ambos os membros

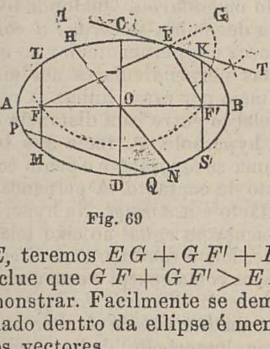

Fig. 69

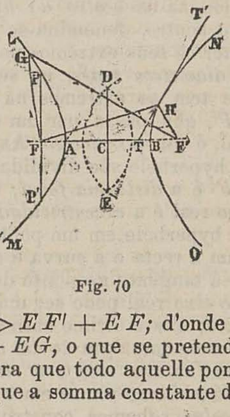

Fig. 70

$FE$, teremos $EG + GF' + FE > EF' + EF$; d'onde se conclue que $GF + GF' > EF' + EG$, o que se pretendia demonstrar. Facilmente se demonstra que todo aquelle ponto situado dentro da ellipse é menor que a somma constante dos raios vectores.

148. *Todos os pontos da ellipse estão equidistantes da circumferencia directriz e de um ponto fixo.*—Fazendo centro em um dos focos $F$ e com o raio $FG$ (fig. 69), egual á $AB$ (o que se póde facilmente imaginar apezar da figura não estar rigorosa), vamos demonstrar que $EG$ é egual a $EF'$. Sabemos que $EF + EF' = AB = FE + EG$; logo $EF' = EG$, o que se pretendia demonstrar.

Em o n.º 11 da *Bibliotheca do Povo e das Escolas* resolvemos differentes problemas a respeito da ellipse, que se podem consultar n'este momento com vantagem, accrescentando, porêm, ao que dissemos, que ha instrumentos destinados a traçar esta curva, e entre elles o compasso de Hamann e Hempel.

## HYPERBOLE

149. Hyperbole é uma linha plana, em que a differença das distancias de cada um dos seus pontos a dois pontos fixos é constante. A recta $AB$ (fig. 70) é o *primeiro eixo, eixo real* ou *transverso* da hyperbole; os pontos $A$ e $B$ denominam-se *vertices*; e os pontos $F$ e $F'$ determinados no prolongamento de $AB$, são os *focos*. As distancias de qualquer ponto da curva aos focos, são os raios sectores; assim as rectas $HF$, $HF'$ e $GF$, $GF'$ são os raios vectores dos pontos $H$ e $G$ da hyperbole. A perpendicular ao meio da recta $AB$ é o *segundo eixo* ou *eixo imaginario*. O ponto $C$, intersecção dos dois eixos, denomina-se *centro da hyperbole*. Qualquer recta que passa pelo centro, denomina-se *diametro* (que póde ter ou deixar de ter os seus extremos na curva); no primeiro caso chamam-se *diametros reaes*, no segundo *imaginarios*. Qualquer recta que tem os extremos na curva denomina-se *corda*; a corda $PP'$, que passa por um dos focos e é perpendicular ao eixo real, é um *parametro*. As cordas perpendiculares aos eixos da hyperbole são divididas ao meio por essas linhas. A recta $FF'$ é a *distancia focal*; e a relação entre esta distancia e o eixo real é a *excentricidade* da hyperbole. A recta que toca na hyperbole em um ponto chama-se *tangente*; e o ponto commum á recta e á curva é o ponto de contacto. A perpendicular á tangente no ponto de contacto é a *normal*. Na hyperbole o eixo real póde ser maior, menor ou egual ao eixo imaginario; n'este ultimo caso a hyperbole é *equilatera*. A circumferencia descripta de um dos focos como centro e com um raio egual ao eixo real é a *circumferencia directriz da hyperbole*.

150. Como vimos em o n.º 11 da *Bibliotheca do Povo e das Escolas*, sabemos construir uma hyperbole, dados os eixos, assim como os outros problemas para determinar esta curva.

151. *A differença entre as distancias de um ponto que está dentro da hyperbole aos focos, é maior que o eixo transverso, e menor se o ponto está fóra.*— Sendo $P$ o ponto interior (fig. 71) temos que $PF - PF' > AA'$

Unindo o ponto $M$ com $F'$ será

$$PF' < MF' + MP$$

e portanto

$$PF - PF' > PF - MF' - MP$$

ou

$$PF - PF' > MF - MF'$$

mas, como $MF - MF' = AA'$

temos: $PF - PF' > AA'$

Se considerarmos o ponto $P'$ exterior, será

$$P'F - P'F' < AA'$$

Temos que $F'P' + P'M > MF'$

d'onde tiramos

$$MF - F'P' - P'M < MF - MF'$$

ou $P'F - F'P' < MF - MF'$

isto é: $P'F - F'P' < AA'$

o que se pretendia demonstrar.

152. *A bi-sectriz do angulo formado pelos raios vectores de*

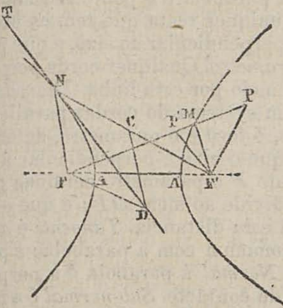

Fig. 71

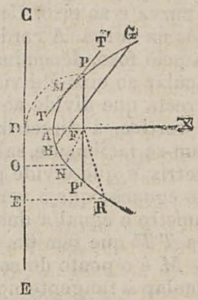

Fig. 72.

*um ponto da hyperbole é tangente á hyperbole.*—Seja $N$ um ponto da curva (fig. 71); a bi-sectriz $TT'$ do angulo formado pelos raios vectores $FN$ e $F'N$, é tangente á hyperbole, e $N$ é o ponto de contacto.

Qualquer outro ponto $D$, por exemplo, da tangente, está fóra da hyperbole. Fazendo $NC$ egual a $NF$, e unindo o ponto $C$ com $D$, temos

$$CF' = AA'$$

mas, como $DF = DC$ e $DC - DF' < CF'$

segue-se que $DF - DF' < CF'$

mas $CF' = AA'$

logo $DF - DF' < AA'$

o que prova (151) que o ponto $D$ está fóra da curva, o que se desejava demonstrar.

153. Quando, traçada uma hyperbole, construirmos outra, tomando para eixo real o eixo imaginario da primeira, e para eixo imaginario o eixo real da hyperbole dada, as duas hy-

perboles assim formadas dizem-se *conjugadas*. Os dois diametros que não incontram as hyperboles conjugadas, denominam-se *asymptotas*.

## PARABOLA

154. **Parabola** é uma linha plana, que tem todos os seus pontos egualmente distantes de um ponto fixo e de uma recta fixa. O ponto fixo $F$ (fig. 72) é o *foco*, e a recta $CE$ é a *directriz*.

*Eixo* é a recta $DX$ perpendicular á directriz e que passa pelo foco. *Raio vector* é toda a recta tirada de um ponto da curva para o foco. *Vertice* da parabola é o ponto $A$ commum á curva e ao eixo. *Corda* é qualquer recta que tem os extremos na curva. A corda $PP'$ perpendicular ao eixo, e que passa pelo foco, denomina-se *parametro*. Qualquer corda perpendicular ao eixo é dividida ao meio por esta linha. *Diametro* é a recta que divide ao meio um systema de cordas parallelas. O vertice, a directriz, o eixo, o foco e o parametro, determinam-se facilmente, sabendo: que o eixo é perpendicular á directriz e que divide pelo ponto $F$ o parametro em duas partes eguaes; que o vertice $A$ divide ao meio $DF$; e que o parametro é egual a duas vezes esta distancia. *Tangente* é a recta $TT'$ que tem um ponto commum com a parabola; o ponto $M$ é o ponto de contacto. *Normal* á parabola é a perpendicular á tangente no ponto de contacto. *Sub-normal* é a parte do eixo interceptada pela normal e pela perpendicular abaixada do ponto de contacto. *Sub-tangente* é a parte do eixo interceptada pela tangente e pela perpendicular abaixada do ponto de contacto.

155. No n.º 11 da *Bibliotheca do Povo e das Escolas*, apresentámos differentes processos para construir esta curva.

156. *Qualquer ponto que está situado dentro da parabola dista mais da directriz que do foco, e o que está situado fóra dista mais do foco que da directriz.*— Seja $P$ o ponto situado fóra da parabola (fig. 73); unindo-o com o foco e tirando a perpendicular $PH$ á directriz que se prolonga até $M$, ponto da curva, teremos $PF + PM > MF$

Sabemos que $PH + PM = HM$

e portanto $(PF + PM) - (PH + PM) > MF - HM$

ou $PF + PM - PH - PM > MF - HM$

$$PF - PH > MF - HM$$

e, visto ser $MF = HM$

será $PF - PH > 0$

ou $PF > PH$

Vê-se pois que o ponto $P$ situado fóra da curva dista mais do foco que da directriz.

Se considerarmos o ponto $P'$ dentro da curva, unindo-o com $F$, e tirando a perpendicular á directriz temos

$$FM + MP' > P'F$$

mas, como

$$FM = HM$$

vem

$$HM + MP' > P'F$$

ou

$$HP' > P'F$$

d'onde concluimos que o ponto situado dentro da curva está mais distante da directriz que do foco, o que se pretendia demonstrar.

157. *A bi-sectriz do angulo formado pelo raio vector de um ponto e pela perpendicular abaixada d'esse ponto sobre a directriz, é tangente á parabola n'esse ponto.*—Seja $T\,T'$ a bi-sectriz do angulo $FNL$ (fig. 73) formado pelo raio vector $NF$ e pela perpendicular á directriz $NL$. Se considerarmos qualquer outro ponto $G$ da tangente, este ponto estará fóra da curva. Unindo o ponto $G$ com o foco e $GO$ (perpendicular á directriz), e unindo o ponto $F$ com $L$, temos que os triangulos $FNR$ e $LNR$ têem o lado $NR$ commum e os angulos $RNL$ e $RNF$ eguaes, e portanto $LR$ egual a $RF$, d'onde se conclue que a tangente é perpendicular ao meio de $LF$, visto os pontos $N$ e $R$ estarem egualmente distantes dos extremos da recta $LF$. Sendo $GO$, como sabemos, perpendicular á directriz, temos $GO < GL$; mas, como $GL$ é egual a $GF$, será $GO < GF$, pelo que se conclue (156) que o ponto $G$ está fóra da curva.

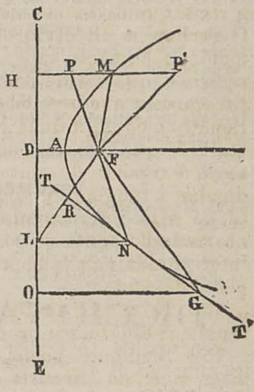

Fig. 73

Ás noções que acabámos de expor seguir-se-ha em um dos numeros proximos da *Bibliotheca do Povo e das Escolas* o que trata da *Geometria no Espaço*.

FIM