PROPAGANDA DE INSTRUCÇÃO
PARA
Portuguezes e Brazileiros

BIBLIOTHECA DO POVO
E DAS ESCOLAS

CADA VOLUME 50 RÉIS

ARITHMETICA
PRATICA

Terceira edição

PRIMEIRO ANNO — PRIMEIRA SERIE

1883
DAVID CORAZZI, EDITOR
EMPREZA HORAS ROMANTICAS
Premiada com medalha de ouro na Exposição do Rio de Janeiro
Administração: 40, R. da Atalaya, 52, Lisboa
Filial no Brazil: 40, R. da Quitanda. Rio de Janeiro

NUMERO
5

CADA VOLUME 50 REIS

CADA VOLUME 50 REIS

INDICE

ERRATAS MAIS IMPORTANTES

Pag.	Linha	Onde se lê	Leia-se
3	7 a 8	bastara	bastará
»	26	extensão,	extensão linear,
»	27 a 28	*extensão.*	*extensão linear.*
15	5	*supprimido*	*supprimindo*
»	25	zero	zeros
16	35	*por zero ou por 5*	*por zero*
17	29	Diminuamos	Diminuimos
20	34	*ou a unidade.*	*e a unidade.*
»	35	1 ou 11.	1 e 11.
»	37	*a unidade.*	*só a unidade.*
23	16	um resto só.	um unico resto differente de zero.

ARITHMETICA PRATICA

> A arithmetica é mais vasta sciencia do que vulgarmente se cuida. Todas as mathematicas puras estão n'ella. A extensão, com que esta importante parte dos conhecimentos humanos deve ser ensinada, depende das circumstancias do educando. O que sobeja a um não bastará a outro; mas decerto a nenhum póde dispensar absolutamente de a apprender nem sexo, nem posição social, nem aptidão.
>
> GARRETT—*Da Educação.*

§ 1.º—Noções preliminares

1. Tudo o que póde augmentar ou diminuir tem o nome de **Grandeza**. Assim a extensão, o peso, o tempo, as paixões, os vicios, etc., porque se podem ter de considerar *maiores* ou *menores*, são **Grandezas**.

2. Quando a grandeza se póde imaginar decomposta em partes eguaes, quer dizer, quando se póde medir, toma o nome de **Quantidade**. Medir é comparar; e comparar é ver quantas vezes uma grandeza, isto é, uma quantidade, é maior ou menor do que outra, ou do que qualquer parte d'esta.

3. A quantidade com que outra se mede, isto é, com que outra se compara, chama-se **Unidade**. E' evidente que deve ser da mesma especie d'aquella que procuramos medir, porque é manifesto que se não podem comparar quantidades heterogeneas. Para medir uma extensão, por exemplo, ninguem empregará uma *medida de volume,* mas sim uma *medida d'extensão.*

4. Depois de compararmos duas grandezas, e de vermos *quantas vezes* uma se contêm na outra, poderemos querer enunciar o resultado d'essa comparação. A expressão empregada para o indicar chama-se **Numero**.

5. Quando o numero designa uma quantidade composta de partes eguaes á unidade escolhida, diz-se **inteiro**. Se indica

uma quantidade composta de partes eguaes entre si, e menores do que a unidade escolhida, chama-se **fraccionario**. Quando exprime quantidades menores do que a unidade chama-se **fraccionario proprio**. Exprimindo quantidades maiores do que a unidade tem o nome de: **fraccionario improprio**. Se contêm unidades e partes da unidade toma a denominação de **mixto**. Se exprime a unidade a que se refere, é **concreto**;—exemplo: *trinta* **kilos**. Quando não designar a unidade a que se refere, dir-se-ha **abstracto**;—exemplo: **trinta**.

6. A sciencia que trata das propriedades elementares dos numeros, e das operações que com elles se podem realizar, é a **Arithmetica**.

7. Para tratar d'essas propriedades e expôr taes operações precisa a arithmetica de certas convenções. E' assim que para exprimir os numeros ella emprega *sons* e *signaes*, e para apresentar ou estudar as operações entre elles effectuadas usa das notações seguintes: $+$, para indicar que as quantidades, entre que está, se sommam; $-$, para se collocar junto e antes das que se subtrahem; $\times$, para as que se multiplicam; e $:$ para as que se dividem. O signal $=$ entre duas quantidades denota que são eguaes entre si. Os signaes $>$ e $<$ indicam desegualdade mutua nas expressões entre que se collocarem. Assim $5 > 3$, e $2 < 7$, lê-se: *cinco* **maior** *do que tres*, e *dois* **menor** *do que sete*.

§ 2.º—Da Numeração

8. A **Numeração** é a arte d'enunciar e escrever os numeros. Divide-se portanto em *numeração falada* e *numeração escripta*. A primeira comprehende os sons e os nomes particulares por que se exprimem os numeros; a segunda, todos os caracteres ou *algarismos* por que elles se representam na escripta.

9. Ao numero que representa a unidade, convencionou-se chamar **um**; á reunião de duas unidades, **dois**; á quantidade formada de duas e mais uma, **tres**; á composta de tres e uma, **quatro**; e assim successivamente até obtermos um numero chamado **nove**, que representa um numero de unidades repetido por esta fórma. Se proseguissemos juntando continua e indefinidamente unidades uma a uma, obteriamos differentes numeros, de diversos nomes. Como porêm a serie dos que assim se podem formar é infinita, comprehende-se que, para representar esses variados grupos d'unidades, teriamos d'inventar infinita quantidade de nomes. A impossibilidade de o

fazer levou ao estabelecimento ou admissão de convenções, e ao artificio. O mesmo nome servirá para designar numeros diversos, adoptando unidades de differentes grandezas. Assim, depois de se juntar uma unidade ao numero *nove* obteremos um novo grupo chamado **dez**, que constituirá uma unidade de segunda ordem, ou uma **dezena**. O grupo de dez *dezenas* recebeu o nome de **centena**; ao grupo de dez *centenas*, chama-se **milhar**, etc., como o indica o seguinte quadro:

Unidade........................	vale	*uma unidade.*
Dezena........................	»	*dez unidades.*
Centena........................	»	*cem* »
Milhar, ou mil.................	»	*mil* »
Dezena de milhar, ou dez mil...	»	*dez mil* »
Centena de milhar, ou cem mil..	»	*cem mil* »
Milhão, ou mil milhares.......	»	*dez centenas de milhar.*
Dezena de milhão, ou dez mil milhares...................	»	*dez milhões.*
Centena de milhão ou cem mil milhares...................	»	*cem milhões.*
Billião ou mil milhões.........	»	*dez centenas de milhão.*
Trillião ou mil billiões.........	»	» » *de billião.*
Quatrillião ou mil trilliões.....	»	» » *de trillião.*
etc.		etc.

Vê-se pois como pelo mesmo nome se podem exprimir numeros differentes. A palavra *tres,* por exemplo, designa sempre o mesmo numero de unidades ; mas, como estas podem ser de ordens diversas, concluimos que aquella mesma palavra servirá de representar ou *tres unidades simples,* ou *tres unidades de segunda ordem* ou *dezenas,* ou *tres de terceira* ou *centenas,* etc.

10. Por abreviatura na pratica designam-se os grupos *dez e um, dez e dois, dez e tres, dez e quatro, dez e cinco,* etc., por **onze, doze, treze, quatorze, quinze,** etc., respectivamente. A's reuniões de *duas, tres, quatro, cinco,* etc. *dezenas,* dá-se o nome de **vinte, trinta, quarenta, cincoenta,** etc., até **noventa,** que representa *nove dezenas.* Chama-se **cem** o grupo de dez dezenas,—que tomará a denominação de **cento,** quando se lhe seguir immediatamente outro numero.

11. Quando se contar dinheiro portuguez empregar-se-ha o vocabulo **conto** para designar *um milhão de réis.* Por conseguinte, em vez de *billião, trillião,* etc., diremos *mil contos, conto de contos,* etc.

12. Para abreviadamente se escreverem todos os numeros inteiros empregam-se certos signaes, chamados **algarismos**, ou **lettras de conta**. Os seus nomes e figura são:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
zero, nada, ou cifra;	um;	dois;	tres;	quatro;	cinco;	seis;	sete;	oito;	nove.

Estes numeros servem para representar unidades de todas as ordens. Cada algarismo tem dois valores: um *absoluto*, outro *relativo*. O *absoluto* não varia, qualquer que fôr a posição que o algarismo occupar n'um numero formado de varios; o *relativo* depende da situação ou collocação d'esse algarismo no numero. No numero 11, por exemplo, ambos os algarismos têem o mesmo valor absoluto; mas o valor relativo do primeiro da direita é de uma unidade simples; e o do primeiro da esquerda é de uma unidade de segunda ordem, ou de uma dezena. A mudança do valor relativo dos algarismos, quando mudam de collocação ou posição em um numero, é a base da *numeração escripta*. Portanto: *todo o algarismo escripto á esquerda d'outro representa unidades dez vezes maiores do que se estivesse no logar d'esse outro.*

13. Ha duas regras para a leitura de numeros inteiros, uma para os escriptos com tres, ou menos algarismos; outra para os formados de mais. Reduz-se a primeira a ler da esquerda para a direita o nome de cada algarismo pospondo-lhe logo o das unidades que por sua collocação elle representar. Exemplo 534, lê-se: *cinco centenas, tres dezenas, quatro unidades;* ou, pelas convenções e abreviaturas sanccionadas no uso: *quinhentas e trinta e quatro unidades.* Para ler numeros de mais de tres algarismos significativos:— *dividir-se-hão em classes de tres algarismos a contar da direita para a esquerda, podendo, como é obvio, a classe da esquerda ter menos de tres algarismos; feito isto, lê-se a primeira classe da esquerda como se ensina acima, juntando-lhe todavia o nome da unidade a que se refere o primeiro algarismo da direita da mesma classe; seguir-se-ha a leitura das classes immediatas, successivamente, juntando sempre o nome da unidade a que se referir o algarismo da direita, até á primeira classe da direita do numero, que é a das unidades simples.* Exemplifiquemos. Para lermos o numero: 134670056794726, dividil-o-hemos em classes de tres lettras d'esta fórma, contando, já se vê, da direita: 134'670'056'794'726; e diremos: *cento e trinta e quatro trilliões, seis centos e setenta billiões, cincoenta e seis milhões, sete centos e noventa e quatro mil, sete centos e vinte e seis unidades.*

14. Para escrever qualquer numero cujo enunciado se oiça, devem-se ir successivamente escrevendo da esquerda para a direita os numeros correspondentes ás classes que se forem mencionando, tendo o cuidado de collocar zeros, quando faltarem unidades d'algumas ordens, no logar que estas deveriam occupar, para que nenhuma classe, com exclusão da primeira da esquerda, tenha menos de tres algarismos, e para que se não juntem classes, que por outros deveram separar-se.

15. Usa-se commercialmente do signal $, chamado **cifrão**, para separar a classe dos milhares da das unidades, quando o numero estiver referido a *réis;* e do signal : para extremar entre si as duas classes dos milhares e dos contos. Exemplo: 5627:537$600 Réis. O cifrão póde supprir a classe da direita, isto é, a das unidades, quando esta seja formada por zeros. Exemplo 1:546$000 Réis, 1:546$ Réis.

§ 3.º—Da addição

16. **Addição** é a operação pela qual se reunem n'um só numero muitos outros da mesma especie. O numero obtido chama-se *somma* ou *total;* os numeros que se reunem, *parcellas.*

17. Na somma de numeros inteiros podemos considerar tres casos: 1.º quando os numeros que se sommam são *digitos,* isto é, formados por um só algarismo; 2.º quando temos de juntar a um numero composto outro digito; 3.º quando se têem de sommar numeros compostos, isto é, numeros de mais de um algarismo.

18. Quando os numeros que se sommam são digitos, far-se-ha a somma *juntando a um as unidades do outro,* **continua e successivamente.** Assim, tendo que addicionar a 9 o algarismo 4, notar-se-ha que quatro é formado de quatro unidades, e que, portanto, para as juntar a 9, devemos proceder d'esta fórma: 9 e 1 faz 10; 10 e 1 faz 11; 11 e 1 faz 12; 12 e 1 faz 13. Como é evidente que este raciocinio é applicavel a qualquer numero de parcellas (embora como exemplificação o applicassemos sómente a duas) e como, pelo facto de se juntarem a 4 continua e successivamente as unidades de 9 (ao contrario do que fizemos), é tambem clarissimo que o numero total de unidades na somma não varia: concluiremos que n'uma somma de quaesquer parcellas *a ordem é arbitraria.* Isto é: $9+4=4+9$.

19. Se tivessemos que addicionar dois numeros, um dos quaes apenas fosse digito, por exemplo, 35 e 7, procederiamos d'este modo. Notariamos que 35 se compõe de 3 dezenas,

isto é, de 3 unidades de segunda ordem, e de mais 5 unidades simples; e que, para addicionar a 35 as 7 unidades simples, sommariamos (por isso que se não podem sommar quantidades que não sejam da mesma especie) estas 7 unidades com as 5 do numero dado 35; e vendo que da somma de 7 com 5 resultavam 12 unidades, ou uma dezena e duas unidades de primeira ordem, juntariamos a dezena obtida com as de sua categoria, isto é, com 3, obtendo um numero final de quatro dezenas, e duas unidades. Assim: $35 + 7 = 42$.

20. Quando haja que sommar differentes numeros todos compostos de mais de um algarismo, reduzimos a operação á somma de numeros digitos. Tendo, por exemplo, que sommar: 327, 456, 289, observamos que o primeiro é formado de 3 centenas, 2 dezenas, e 7 unidades; que o segundo tem 4 centenas, 5 dezenas, e 6 unidades; e que o terceiro se compõe de 2 centenas, 8 dezenas, e 9 unidades. Sommaremos então centenas com centenas, dezenas com dezenas, e unidades com unidades, separando da somma d'estas as dezenas que se obtiverem para se reunirem ás da sua especie, e da somma das dezenas as centenas formadas para as addicionarmos com as centenas dos numeros dados. Praticamente não se faz a decomposição de cada numero nas unidades de diversas ordens que elle comtêm; mas collocam-se uns debaixo dos outros, por fórma que na mesma columna vertical fiquem quantidades da mesma natureza numerica. Exemplo:

$$\begin{array}{r} 74{:}529 \\ 3{:}627 \\ 535 \\ 4{:}576 \\ \hline 83{:}267 \end{array}$$

Quando as parcellas a sommar forem em numero demasiado grande, podem grupar-se, para maior facilidade, em series de 8 ou 10, que se sommarão separadamente, reunindo depois estas differentes sommas parciaes n'um numero só.

§ 4.º — Da subtracção

21. **Subtracção** ou **Diminuição** é a operação pela qual se tiram de um numero as unidades de outro. O resultado da operação diz-se *resto, excesso* ou *differença*, consoante o fim que se tinha em vista. Commercialmente chama-se **saldo**. Ao numero a que se tiram as unidades de outro dá-se o nome de

additivo ou *diminuendo;* ao segundo, o de *subtractivo* ou *diminuidor*. Se, por exemplo, quizessemos tirar de 9 o numero 5, 9 seria o additivo, 5 o subtractivo, e 4 o resto da operação.

22. Na subtracção de numeros inteiros podem dar-se diversos casos: 1.º o de serem additivos e subtractivos digitos; 2.º additivos compostos e subtractivos digitos; 3.º additivos e subtractivos compostos.

Tanto no primeiro como no segundo caso: *tirar-se-hão do additivo uma a uma as unidades do subtractivo;* ou *contar-se-hão tambem uma a uma as unidades que é mister juntar ao subtractivo para produzir o additivo*. Por exemplo, para de 16 se tirar 5, diremos: 16 menos 1, 15; 15 menos 1, 14; 14 menos 1, 13; 13 menos 1, 12; 12 menos 1, 11. E' pois o resto 11. Tambem poderemos dizer: 5 e 1, 6; e 1, 7; e 1, 8; e 1, 9; e 1, 10; e 1, 11; e 1, 12; e 1, 13; e 1, 14; e 1, 15; e 1, 16. Como ao numero 5 juntámos 11 unidades para completar 16, será 11 o resto da operação.

23. Para se effectuar a subtracção no terceiro caso, isto é, quando os numeros, additivo e subtractivo, são compostos de mais de um algarismo, observaremos o seguinte: *escreve-se o subtractivo debaixo do additivo de modo que em cada columna vertical fiquem unidades da mesma especie; subtrahem-se as unidades simples do subtractivo das do additivo, as dezenas das dezenas, as centenas das centenas, etc., escrevendo os restos de cada uma d'estas operações parciaes, nas suas columnas respectivas, inferiormente a um traço que se tem passado previamente por debaixo do subtractivo; se algum algarismo do subtractivo for superior ao seu correspondente do additivo, juntar-se-hão mentalmente 10 unidades ao algarismo do additivo para que a subtracção seja possivel; e, ao passarmos para a columna immediatamente á esquerda, addicionaremos, tambem mentalmente, 10 unidades ao algarismo do subtractivo, sendo este algarismo assim augmentado que se subtrahe do do additivo que lhe ficar superior.* Exemplo: De 93:243 subtrahir 72:991.

```
93:243
72:991
------
20:252
```

Depois de escripto o subtractivo 72:991 por debaixo do additivo 93:243, e de ter passado o traço, começaremos pela columna da direita, dizendo: 3 menos 1, 2; 14 menos 9, 5; 12 menos 10, 2; 3 menos 3, 0; 9 menos 7, 2.

24. Quando o additivo tiver alguns zeros, proceder-se-ha da mesma fórma. Exemplo: De 6.300:024 tirar 5.412:247.

Dizemos: 14 menos 7, 7; 12 menos 5, 7; 10 menos 3, 7; 10 menos 3, 7; 10 menos 2, 8; 13 menos 5, 8; 5 menos 5, zero. Os zeros á esquerda de qualquer numero, porque nada significam,

6.300:024
5.412:247
0.887:777

omittem-se na pratica. De modo que, n'este exemplo, o resto da operação é 887:777. Quando houver mais de um subtractivo a tirar de um additivo, a subtracção chama-se *successiva*.

E' evidente que para effectuar uma subtracção successiva, se deve, depois de obtido o primeiro resto, tirar d'este o segundo subtractivo, e assim successivamente, do segundo o terceiro, etc.; ou tirar do additivo a somma dos subtractivos dados. O resultado é o mesmo.

§ 5.º—Da Multiplicação

25. **Multiplicação** *é uma operação pela qual se repete um numero tantas vezes, quantas as unidades de outro.* O numero que se repete chama-se *multiplicando;* o que indica as vezes que aquelle se repete, *multiplicador.* O resultado da operação diz-se *producto.*

Multiplicar 3 por 4 é, portanto, repetir 3 tantas vezes quantas as unidades de 4. E' effectuar uma somma de 4 parcellas eguaes a 3. Assim $3 \times 4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$. N'este exemplo 3 é o multiplicando, 4 o multiplicador, 12 o producto. Os dois numeros que se multiplicam têem o nome de *factores* do producto.

26. Na multiplicação de numeros inteiros temos de considerar differentes casos: 1.º quando os factores são digitos; 2.º quando de dois factores só um é digito; 3.º quando ambos são numeros compostos; 4.º quando um ou ambos terminam em zeros.

27. Como dissemos, o producto de dois numeros digitos póde reduzir-se a uma somma de parcellas eguaes ao multiplicando. Como isto, porêm, fôra longo e fastidioso, convêm saber de cór os productos dos numeros digitos.

28. Para multiplicar um numero composto por outro digito, observaremos a seguinte regra: *Escreve-se o multiplicador por debaixo do multiplicando, e passa-se um traço sob o qual se escreverá o producto. Ir-se-hão depois multiplicando successivamente pelo multiplicador as unidades de diversas ordens do multiplicando. Escreveremos os productos parciaes, quando não excederem 9, taes quaes forem obtidos; e juntaremos, no caso contrario, as unidades de ordem immediatamente superior (isto é, as dezenas d'esses productos parciaes) ás da sua especie que formos obtendo, deixando sómente escriptas as unidades: o ultimo producto, feitas as addições, se as houver, das dezenas resultantes do producto parcial anterior, escrever-se-ha tal qual se*

achar. Exemplo: Multiplicar 7:689 por 4. Disporemos a operação da seguinte fórma:

```
 7:689
     4
------
30:756
```

Multiplicamos pelas unidades simples, pelas dezenas, pelas centenas, etc. do multiplicando, o multiplicador, dizendo: 4 vezes 9 são 36; e, porque este producto parcial é maior do que 9, escreveremos as 6 unidades simples d'elle; reservaremos as 3 dezenas para as sommarmos com as que resultarem da multiplicação de 8 (dezenas do multiplicando) por 4. Assim, 4 vezes 8, 32, e 3, 35. Com este producto 35 procederemos como com o producto anterior, 36; e escreveremos sómente as suas unidades, 5; levando as 3 dezenas d'esse producto para as sommar com o producto de 4 por 6. Portanto, 4 vezes 6, 24, e 3, 27. Ao producto 27, faremos o mesmo que aos anteriores: tomaremos nota apenas das 7 unidades, levando 2 a addicionar ao producto de 4 por 7, d'este modo: 4 vezes 7, 28, e 2, 30. Este producto parcial, por ser o ultimo, escrevel-o-hemos tal qual o achámos. O producto final, pois, que resultou da multiplicação de 7:689 por 4, é 30:756.

29. A multiplicação de dois numeros compostos reduz-se ao caso anterior, repetido mais de uma vez. Obteremos, pois, o producto de dois numeros compostos: *escrevendo o multiplicador sob o multiplicando, e passando inferiormente ao primeiro um traço; multiplicar-se-ha depois, successivamente, por cada algarismo do multiplicador todo o multiplicando, da direita para a esquerda, escrevendo os productos parciaes obtidos uns debaixo dos outros, por fórma que o primeiro algarismo da direita de cada producto parcial fique debaixo do algarismo do multiplicador que deu esse producto; far-se-ha depois a somma de todos os productos parciaes, somma que será o producto total desejado.* Exemplo: Multiplicar 129 por 345.

```
  129
  345
-----
  645
 516
387
-----
44505
```

Multiplicamos 129 pelo primeiro algarismo da direita do multiplicador, 5, o que dá 645. Escreveremos este producto parcial de maneira que o seu primeiro algarismo da direita fique por debaixo de egual algarismo do multiplicador. Iremos depois multiplicar 129 por 4, o que dará 516, que se escreverá por debaixo de 645, por fórma que o 6 fique inferiormente ao 4. Depois, multiplicaremos 129 por 3, o que produz 387, que assentaremos de modo que o algarismo das unidades d'este producto (isto é, 7) fique por debaixo do algarismo das dezenas do producto anteriormente obtido, 1. Effectuando depois a somma dos diversos productos parciaes obtidos, teremos o producto total 44:505.

30. Quando um dos factores for a unidade seguida de zeros, escrever-se-hão estes zeros á direita do outro factor, e teremos assim o producto pedido. Exemplo: 4:529 × 1:000 = 4.529:000.

Quando um dos factores for um numero differente da unidade, seguido de zeros, multiplicar-se-hão os numeros sem fazer caso dos zeros, que depois se juntarão á direita do producto. Exemplo: 357 × 27:000 = 357 × 27 × 1:000 = 9:639 × 1:000 = 9.639:000.

Se ambos os factores terminarem em zeros, multiplicar-se-hão sem attender aos zeros, que se juntarão á direita do producto, tantos quantos existem nos dois factores. Exemplo: 2:700 × 5:600 = 27 × 56 × 10:000 = 1:512 × 10:000 = 15.1200:00. Quando houver mais de dois factores, a multiplicação chama-se *successiva*. N'este caso obter-se-ha o producto, multiplicando o producto de dois numeros pelo terceiro; este producto pelo quarto; o producto do quarto pelo quinto, etc.

§ 6.º — Da Divisão

31. **Divisão** *é a operação pela qual se acha quantas vezes um numero se contêm n'outro.* Póde tambem dizer-se que divisão é a *operação pela qual se acha um dos factores de um producto, quando este e os outros factores forem dados.* O producto chama-se *dividendo;* o factor conhecido, *divisor;* o que se quer achar, *quociente.* Pela primeira definição dada, será *dividendo* o numero em que nós queremos ver quantas vezes cabe o outro, que é o *divisor.* O numero de vezes que este se contêm n'aquelle, é o *quociente.* Quando o divisor se não contiver no dividendo um numero exacto de vezes, sobrará uma parte, inferior ao divisor, e que tem o nome de *resto.* A divisão diz-se então *inexacta.*

32. Pelas duas definições dadas no numero anterior, differentes na fórma, identicas na essencia, se conclue que dividir, por exemplo, 24 por 3, é examinar quantas vezes 3 se contêm em 24, o que dá 8; ou é descobrir o factor que multiplicado por 3 produza 24. Da primeira definição vê-se claramente que pela divisão nós decompomos o dividendo em tantas partes eguaes quantas as unidades do divisor.

33. Na divisão de inteiros ha que considerar differentes casos: — 1.º o quociente e o divisor são digitos; 2.º só o é o quociente; 3.º são ambos numeros compostos; 4.º o divisor é a unidade, ou qualquer outro numero, seguido do zero; 5.º tanto o dividendo como o divisor terminam em zeros.

34. Quando tanto o quociente como o divisor forem digitos, pela taboada de multiplicação se obterá prompta e facilmente o quociente. Pretendendo, por exemplo, o quociente de 24 por 8, procuraremos na mesma taboada qual é o numero que multiplicado por 8 dá 24, e veremos que é 3. Egualmente procederemos quando se tratar de achar o quociente de 42 por 9. Examinaremos qual é o numero que multiplicado por 9 dá 42; e não o achando, pararemos no producto immediatamente inferior a 42, que é 36. E, como este producto resulta da multiplicação de 9 (divisor) por 4, concluiremos ser 4 o quociente procurado, e 6 (differença de 36 para 42) o resto da operação.

Tendo de memoria a taboada de multiplicação, facillima será a divisão no caso sujeito.

Para saber se o quociente é digito, bastará juntar um zero á direita do divisor; se o numero assim obtido for superior ao dividendo, o quociente é digito; no caso contrario, é composto.

35. Quando o quociente é digito e o divisor composto, faremos o seguinte: *Tomaremos o algarismo das unidades maiores do divisor e veremos quantas vezes elle se contêm nas unidades da mesma especie do dividendo. Por este meio ter-se-ha o quociente desejado, ou um algarismo maior. Para o verificar, multiplicaremos este algarismo pelo divisor; concluindo que elle serve, só quando aquelle producto for egual ou inferior ao dividendo. No caso contrario, ensaiaremos outro algarismo que diffira do primeiro uma unidade, tornando a verificar, até achar o quociente que se procura.*

Exemplo: dividir 3:427 por 729.

3427	729
2916	4
511	

N'este exemplo faz-se o seguinte: toma-se o algarismo 7 do divisor, que indica centenas, e vê-se quantas vezes elle se contêm nas 34 centenas do dividendo: contêm-se 4 vezes. Multiplicaremos, pois, 4 por todo o divisor, o que dá 2:916, subtrahiremos este numero do dividendo, e obteremos o resto 511.

Se o producto alludido fosse superior ao dividendo, em vez de 4 experimentariamos 3, etc., como acima se disse.

Praticamente não se escreve o producto debaixo do dividendo para o diminuir d'este, mas vae-se simultaneamente fazendo a multiplicação e a subtracção. No exemplo supra dizemos, por conseguinte: 4 vezes 9, 36, para 37, 1; 4 vezes 2, 8, e 3 11, para 12, 1; 4 vezes 7, 28, e 1, 29, para 34, 5.

36. Quando o quociente e o divisor são compostos: *separaremos á esquerda do dividendo tantos algarismos quantos bas-*

tem para que o numero por elles formado seja superior ao divisor, sem o conter todavia dez vezes; tal numero será o primeiro dividendo parcial; dividiremos este primeiro dividendo parcial pelo divisor (regra antecedente do n.º 35), *e obteremos o primeiro algarismo do quociente, multiplicado este numero pelo divisor e subtrahido o producto do dividendo parcial, obteremos um primeiro resto para a direita do qual se baixará, isto é, se escreverá o algarismo do dividendo que se seguir ao primeiro dividendo parcial; o numero resultante é o segundo dividendo parcial, que se dividirá pelo divisor, dando o segundo algarismo do quociente; este segundo algarismo fornecerá outro producto a subtrahir do segundo dividendo parcial; baixa-se depois para a direita do resto que se obtiver o algarismo do dividendo que estiver á direita do que primeiramente se abaixou; isto continuará até que se tenha abaixado o ultimo algarismo do dividendo; o resto da ultima divisão parcial é o resto da operação.* Exemplo: dividir 63:425 por 246.

63425	246
1422	257
1925	
203	

N'este exemplo tomámos á esquerda do dividendo o numero 634, primeiro dividendo parcial, que dividimos por 246, obtendo 2. Multiplicámos 2 por 246 e subtrahimos de 634, o que deu 142. Baixámos para a direita d'este resto o algarismo 2, e obtivemos o segundo dividendo parcial 1422, que dividido por 246 produziu 5. O producto de 246 por 5 foi subtrahido de 1422 e deu 192. A' esquerda d'este resto collocámos o algarismo 5, e o terceiro dividendo parcial 1925 dividido por 246 deu 7. Finalmente diminuimos o producto de 7 por 246 do dividendo 1925, e obtivemos para resto da operação o numero 203.

Quando no decurso da divisão apparecer um dividendo parcial inferior ao divisor, escrever-se-ha um zero no quociente, e baixar-se-ha para a direita d'esse dividendo parcial o outro algarismo do dividendo, immediato ao antecedentemente baixado. Exemplo: dividir 45:697 por 35.

45697	35
106	1305
197	
22	

Dividido 45 (1.º dividendo parcial) por 35, o que produziu para o quociente 1; e feita a divisão de 106 (2.º dividendo parcial) por 35, d'onde resultou 3; baixámos 9 para a direita do segundo resto 1; e como 19 é inferior a 35, baixámos para a direita de 19 o algarismo 7, e dividimos 197 por 35, obtendo o algarismo 5, que escrevemos no quociente depois de havermos escripto 0 anteriormente, quando se viu que 19 se não podia dividir pelo divisor 35.

37. Se o divisor for a unidade seguida de zeros, *o quociente achar-se-ha supprimido á direita do dividendo tantos algarismos quantos zeros houver no divisor; a parte que ficou é o quociente, a supprimida é o resto da operação.* Exemplo: dividir 24:249 por 1:000. N'esta divisão o quociente é 24, e o resto 249.

Quando o divisor for formado por qualquer numero seguido de zeros, para termos o quociente: *supprimiremos á direita do dividendo tantos algarismos quantos zeros houver no divisor, assim como n'este os zeros; dividir-se-hão depois os numeros resultantes, segundo as regras que já expuzemos; o verdadeiro resto será formado pelo que se obtiver, com os algarismos que se supprimiram, á direita.* Exemplo: dividir 6.432:975 por 89:000.

6432(975	89(000
202	72
24 975 *é o verdadeiro resto.*	

Supprimimos tres zeros no divisor, e tres algarismos, 975, no dividendo. Dividimos em seguida 6432 por 89 e achamos, para quociente 72, e para resto 24. O verdadeiro resto será pois 24975.

38. Quando tanto o dividendo como o divisor terminarem por zero, *supprimem-se estes no dividendo em numero egual ao dos do divisor, e segue-se a divisão ao modo ordinario.*

39. Na pratica, quando o divisor for numero digito, simplifica-se o processo supra-exposto retendo de memoria os restos e os dividendos parciaes successivos, escrevendo apenas os algarismos do quociente. Notaremos tambem que dividir um numero por 2, 3, 4, 5, etc., eqüivale a tomar-lhe a *metade*, a *terça*, a *quarta*, a *quinta parte*, etc. Exemplo: para dividir 369 por 3, diremos: a terça parte de 3, 1; a terça parte de 6, 2; a terça parte de 9, 3. Será pois o quociente: 123. Querendo dividir 2:115 por 5, diremos: a quinta parte de 21, 4; sobra 1, portanto a quinta parte de 11, 2; e finalmente, a quinta parte de 15, 3. O quociente é, por conseguinte: 423.

40. No caso em que o dividendo for unico, e os divisores forem mais de um, a divisão diz-se *successiva*. O resultado poderá achar-se, ou dividindo o dividendo pelo primeiro divisor, o quociente achado pelo segundo, o d'esta divisão pelo terceiro, etc., ou então dividindo pelo producto de todos os divisores o dividendo dado.

§ 7.º — Da Divisibilidade

41. Diz-se que um numero inteiro é *divisivel* por outro quando não der resto a divisão do primeiro pelo segundo. N'esta hypothese o numero que divide chama-se *divisor* ou *submultiplo* do primeiro, que terá o nome de *multiplo* do segundo. Portanto, multiplo d'um numero é o producto d'este por outro. O numero 18, por exemplo, é *divisivel* por 3, porque a divisão não dá resto; e 18 é *multiplo* de 3, porque é egual a 6 multiplicado por 3. N'este caso 3 é *divisor* ou *submultiplo* de 18.

42. Quando effectuarmos uma divisão inexacta por 2 ou por 5, notaremos que os restos obtidos são os mesmos que se obteriam dividindo os algarismos das unidades dos dividendos por aquelles divisores. Quer isto dizer, que dividindo, por exemplo, 37 por 2 ou por 5, nós obteremos respectivamente os restos 1 e 2, que são os mesmos que se obteriam dividindo 7 (algarismo das unidades do numero dado), por 2 ou por 5. D'aqui a seguinte regra: *Para que um numero seja divisivel por 2 ou por 5 é necessario e sufficiente que o algarismo das suas unidades simples o seja.*

Chama-se numero *par* o que fôr divisivel por 2. Logo, *conhecer-se-ha se um numero é divisivel por 2, quando terminar por algarismo par.* Os algarismos impares chamam-se na linguagem vulgar: *nones.*

43. Diz-se divisivel por 3 ou por 9 todo o numero, *cujos algarismos sommados como unidades simples dêem um multiplo de 3 ou de 9.* Exemplo: 329 não é divisivel por 3 nem por 9, porque a somma de seus algarismos: 3, 2, 9, dá 14, que não é divisivel nem por 3 nem por 9. Pelo contrario, 6462 é divisivel por 3 e por 9, porque a somma de seus algarismos o é. Vê-se praticamente se qualquer numero é ou não divisivel por estes divisores: *extrahindo os noves ao numero; porque, se o resto depois da extracção fôr zero, elle será divisivel por 9; se fôr zero, 3, ou 6, será divisivel por 3.*

44. *Todo o numero terminado por zero ou por 5 é divisivel por 2, por 5 e por 10. Se terminar por dois zeros, é divisivel por 100, por 4, e por 25. Se terminar por tres zeros, será divisivel por 1000, por 8, e por 125, etc.* Por conseguinte, um numero será divisivel por 10, *se acabar em zero;* por 100, *se acabar em dois zeros;* por 1000, *se terminar em tres,* etc.

45. Qualquer numero será divisivel por 11, *quando a differença entre a somma dos algarismos de ordem impar e a dos*

de ordem par, a contar da direita, o fôr; isto é, quando essa differença fôr zero, 11, ou um multiplo de 11. Exemplo: o numero 534:435 é divisivel por 11, porque sommando os algarismos impares: 5 + 4 + 3, e os pares 3 + 4 + 5, sendo eguaes as sommas, a sua differença é nulla.

§ 8.º—Das provas das operações d'inteiros

46. Prova *d'uma operação é outra pela qual se verifica se o resultado da primeira é ou não exacto.*

Ha duas especies de provas: *provas reaes*, e *provas por divisores.*

47. *A prova real d'uma operação é a operação inversa.* Será, pois, a subtracção a prova real da addição, a addição a da subtracção, a divisão a da multiplicação, a multiplicação a da divisão.

48. *Prova real da addição.* Tendo sommado 2:428, 3:474 5:698, como se vê no exemplo, obteve-se a somma 11:600. Para verificarmos se esta somma é verdadeira, separaremos uma parcella, 2:428 por exemplo, sommaremos as demais, o que dará 9:172. Subtrahiremos este numero da somma total, 11:600, e apparecer-nos-ha a parcella separada, 2:428. Concluiremos que a somma 11:600 está exacta.

2:428
3:474
5:698
11:600
9:172
2:428

Ha ainda outro processo para verificar se a operação está certa. Consiste em sommar segunda vez, pela ordem inversa do modo como primeiramente se sommára. Isto é, se sommámos da primeira vez de cima para baixo; sommaremos da segunda vez debaixo para cima.

49. *Prova real da addição.* Diminuamos o numero 54:513 de 92:457, e obtemos o resto 37:944. Para verificar-lhe a exacção, sommal-o-hemos com o subtractivo, para vêr se dá o additivo, o que effectivamente se realisa. Diremos, pois, que a nossa operação está certa.

92:457
54:513
37:944

50. *Prova real da multiplicação.* Se multiplicarmos 234 por 527, obteremos o producto 123:318. Para tirarmos a prova real, dividiremos o producto achado por um dos factores, por 234, por exemplo, e deveremos achar o outro factor. E' isto o que effectivamente se dá com o exemplo supra. Esta prova é consequencia da definição de multiplicação que démos acima.

51 *Prova real da divisão.* Dividindo 3:427 por 54, acharemos para quociente 63, e para resto 25. Para nos certificar-

mos da verdade do resultado, multiplicaremos o divisor 54 pelo quociente 63, e juntaremos a este producto o resto 25. Isto é: 54 × 63 + 25 = 3:427. A operação está portanto certa.

52. As provas por divisores mais geralmente usadas são as *provas dos noves e dos onzes*. Mostraremos a sua execução.

53. *Addição*. Extrahiremos os noves a cada parcella, juntando o resto de cada uma á seguinte, até á ultima, de cujo resto se tomará nota. Extrahir-se-hão depois os noves á somma. Este resto deve ser egual ao primeiro. Exemplo: Feita a somma, diremos: 3 e 4, 7, e 2, 9, noves fóra, nada; 7 (passando á 2.ª parcella) e 5, 12, noves fóra, 3, e 6, 9, noves fóra, nada; 3 (e saltaremos o 9, o que sempre se faz) e 3 (da 3.ª parcella), 6, e 4, 10, noves fóra, 1; e 8, 9, noves fóra nada. Extrahindo depois os noves á somma, diremos: 1 e 2, 3, e 5, 8, e 6, 14, noves fóra 5, e 4, 9, noves fóra nada. Como se vê os dois restos são eguaes.

3:427
5:639
3:498
12:564

54. *Subtracção*. Para se tirar a prova dos noves á subtracção, extrahir-se-hão os noves á somma do subtractivo com o resto, e depois ao additivo. Os dois restos da extracção dos noves devem ser eguaes.

Por exemplo: De 4:529 tirar 3:427.

4:529	...resto 2
3:427	..resto 2
1:102	

Extrahimos os noves á somma de 3:427 e 1:102, o que deu de resto 2. A extracção dos noves do additivo deu resto egual.

55. *Multiplicação*. A prova dos noves d'esta operação tira-se extrahindo os noves aos dois factores, multiplicando os restos obtidos e extrahindo os noves ao seu producto, e extrahindo finalmente o resto ao producto dos dois factores dados. Os restos devem ser eguaes.

Exemplo. Multiplicando 234 por 527, achamos para producto o numero 123:318.

234
527
1638
468
1170
123318

0	0
5	0

Extrahiremos os noves ao multiplicando e achamos zero para resto. Extrahindo-os ao multiplicador acharemos 5. Multiplicando 5 por zero, ter-se-ha zero para producto. A extracção dos noves ao producto total dá zero tambem.

56. Divisão. Para tirar a prova dos noves á divisão, extrahiremos os noves ao divisor, depois ao quociente, multiplicaremos os restos obtidos, extrahiremos os noves ao seu producto, juntaremos

este resto da extracção com o da divisão, se o houver, e extrahiremos os noves a esta somma. Iremos depois fazer a extracção dos noves ao dividendo. O resto d'esta ultima extracção deve ser egual ao anterior. Exemplo: Dividir 54:525 por 67.

54525	67		
92	813		
255		4	3
54		3	3

A extracção dos noves ao divisor 67, dá de resto 4; e a do quociente dá de resto 3. Multiplicando estes restos temos 12; extrahindo os noves a 12, temos 3, que sommados com 54, dá, depois d'extrahidos os noves a 57, 3. A extracção dos noves ao dividendo produz tambem 3.

57. As provas dos onzes tiram-se da mesma fórma que as dos noves.

Exemplifiquemos. Para tirar a prova dos onzes á addição seguinte, sommaremos as columnas impares a contar da direita: $9+7+5+5+4+2=32$; sommaremos depois as columnas pares: $2+2+5+4+3+2=18$; subtrahiremos esta somma da anterior, o que dá 14, que diminuido de 11 dará 3. Tiraremos depois os onzes á somma, dizendo: 1 e 2, 3, e 1, 4; 1 e 0, 1; 4 menos 1, 3. Os restos são eguaes.

4:529
3:427
2:255
10:211

Analogamente á prova dos noves se procederia com as outras operações.

58. Todas as provas por um divisor são falliveis, porque podem induzir-nos em erro. Toda a vez que no decurso de uma operação se haja commettido erro multiplo d'um numero, já a prova por esse numero dará certa, estando inexacta a operação.

§ 9.º—Das Potencias d'inteiros e quebrados ordinarios

59. Chama-se *potencia* de um numero o *producto de factores eguaes a esse numero.* O numero repetido como factor é a *base* da potencia; as vezes que a repetição se deu constituem o *grau* ou *expoente* da potencia. Quando o factor está repetido duas vezes, a potencia tem a designação de *segunda potencia*, ou *quadrado;* quando tres vezes, diz-se *terceira potencia*, ou *cubo;* quando quatro, *quarta potencia*, etc. A potencia de um numero indica-se escrevendo a base, e o expoente á direita e superiormente á base em lettra menor. Exemplo: a quinta potencia de 4, é 4^5; o cubo de 2, é 2^3; o quadrado de 7, é 7^2.

60. Elevar um numero a uma potencia, é achar o valor

d'essa potencia. Obtem-se esse valor multiplicando a base tantas vezes por si mesma quantas as unidades do expoente. Exemplo: achar o cubo de 8, isto é, 8^3. Multiplicaremos 8 tres vezes por si mesmo, o que dará: $8 \times 8 \times 8 = 512$. Logo: $8^3 = 512$.

Pela mesma razão, para se obter qualquer potencia de 10, bastará multiplicar 10 por si mesmo tantas vezes quantas unidades tiver o expoente. A quarta potencia de 10, achar-se-ha multiplicando 10 quatro vezes por si mesmo. Logo $10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10{:}000$. E tambem $10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1.000{:}000$. D'aqui a seguinte regra: *qualquer potencia de 10, 100, 1:000, etc., achar-se-ha escrevendo á direita da unidade tantos zeros quantas as unidades do producto do expoente da potencia pelo numero de zeros da base.*

61. O producto de potencias da mesma base obtem-se *sommando os expoentes.* Isto é, $5^3 \times 5^4 = 5^{3+4} = 5^7 = 15{:}625$.

62. O quociente de potencias da mesma base obtem-se *subtrahindo os expoentes.* Exemplo: $6^4 : 6^2 = 6^{4-2} = 6^2 = 36$.

63. O producto de potencias do mesmo grau de bases differentes obtem-se *multiplicando as bases, e elevando esse producto ao expoente dos factores.* Exemplo: $2^3 \times 3^3 \times 5^3 = (2 \times 3 \times 5)^3 = 30^3 = 27{:}000$.

64. O quociente de duas potencias do mesmo grau de bases differentes obtem-se *dividindo as bases, e elevando o quociente ao expoente commum.* Exemplo: $6^4 : 2^4 = (6 : 2)^4 = 3^4 = 81$.

65. A potencia d'outra potencia obtem-se *levantando a base ao expoente producto dos das duas potencias.* Exemplo: $(2^2)^3 = 2^{2 \times 3} = 2^6 = 64$.

66. Eleva-se um quebrado ordinario a uma potencia, *elevando a essa potencia os seus dois termos.*

Exemplo: $\left(\dfrac{2}{7}\right)^3 = \dfrac{2^3}{7^3} = \dfrac{8}{343}.$

§ 10.º—Dos Numeros primos

67. *Numero primo é o que tem por divisores unicos o proprio numero ou a unidade.* Por exemplo, 11 é numero primo, por ter apenas para divisores 1, ou 11.

Dois numeros dizem-se *primos entre si, quando tiverem por divisor commum a unidade.* Por exemplo: os numeros 16 e 27 são primos entre si, porque só têem por divisor commum a unidade. Os numeros 16 e 27, não são numeros primos absolutos, e comtudo são-no entre si. Para isto se dar entre dois numeros, não é mister que elles sejam numeros primos absolutos.

68. Para se formar uma tábua de numeros primos, escreveremos a serie dos numeros inteiros consecutivos desde 1 até ao numero que se quizer para limite d'extensão; por exemplo, desde 1 até 50, d'este modo:

Começaremos por eliminar, traçando-os, todos os multiplos de 2, com exclusão d'este numero, de 2 em 2. Faremos o mesmo com relação aos multiplos de 3, sem contar este, de 3 em 3. O mesmo, para com os multiplos de 5, excluindo este, de 5 em 5; para com os de 7, não contando este, de 7 em 7, etc. Os que se não riscarem serão os numeros primos de 1 a 50:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

69. Para se conhecer se um numero é primo, *dividil-o-hemos por todos os numeros primos inferiores até apparecer um quociente menor do que o divisor respectivo, ou um resto zero. No 1.º caso o numero será primo, no 2.º não.*

Por exemplo: ver se 113 é primo. Fazendo as divisões de 113 pelos numeros primos 2, 3, 5, 7, 11, vemos que nenhuma d'estas divisões se faz exactamente, e que o quociente da divisão de 113 por 11 é 10, numero inferior ao divisor. Logo 113 é primo.

70. Para decompor um numero em factores primos observa-se a seguinte regra: *Se o numero fôr divisivel por 2, faz-se a divisão, assim como a do quociente obtido, e a dos seguintes, se terminarem em algarismo par, por aquelle numero; isto as vezes que se puder. Vê-se depois se o ultimo quociente obtido é divisivel por 3; se o fôr procede-se á divisão, como se procedeu com o divisor 2. Continuar-se-ha, dividindo por 5, 7, 11,* etc., *até se obter para quociente um numero primo absoluto.* Um exemplo esclarecerá a regra. Seja o numero 9:906 o que pretendemos decompor em factores primos. Disporemos o calculo como se segue:

9906	2
4953	3
1651	13
127	127
1	

Dividimos 9:906 por 2, e acharemos 4:953; que dividimos por 3, achando 1:651, que não sendo divisivel nem por 3, nem por 5, nem por 7, fomos dividir por 13, dando-nos 127, que é numero primo absoluto.

O numero dado é, pois, $9:906 = 2 \times 3 \times 13 \times 127$.

Daremos outro exemplo, e seja o numero 33:000.

33000	2
16500	2
8250	2
4125	3
1375	5
275	5
5	5
11	11
1	

Tendo procedido com este exemplo exactamente como haviamos procedido com o numero antecedente, diremos que $33000 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 511$, ou:

$$33000 = 2^3 \times 3 \times 5^3 \times 11$$

§ 11.º — Do maximo divisor commum, e do menor multiplo commum

71. *Maximo divisor commum* de dois ou mais numeros inteiros *é o maior numero que os dividir exactamente.* O maximo divisor commum, de 698 e 128, por exemplo, é 2, por não haver outro numero maior que os divida. O maximo divisor commum de dois numeros primos entre si, é a unidade. Portanto o maximo divisor commum de 16 e 25, é 1.

72. Para achar o maximo divisor commum entre dois numeros inteiros *divide-se o maior pelo menor; se fôr zero o resto d'esta divisão, o maximo divisor commum dos dois numeros é o menor d'elles; se porêm houver resto, dividir-se-ha o menor dos dois numeros pelo resto, depois ainda o divisor pelo resto, se o houver, e assim successivamente até se achar um resto nullo; o ultimo divisor, ou, o que é o mesmo, o penultimo resto, será o maximo divisor commum pedido.*

Exemplo: Achar o maximo divisor entre 742 e 118.

Dispõe-se o calculo d'esta fórma:

	6	3	2	8
742	118	34	16	2
34	16	2	0	

Escrevemos o numero maior, 742, e á sua direita o menor, 118, separados por um traço vertical. Traçamos depois uma recta horizontal por sobre 113, prolongando-a sufficientemente, e sobre ella iremos assentando os quocientes que apparecerem, o primeiro dos quaes é 6. Divide-se depois 118 por 34, resto da 1.ª divisão, e assim obteremos o 2.º quociente 3, e o 2.º resto 16. O divisor anterior 34, dividido pelo 2.º resto 16, dá para quociente 2, e para resto 2. Dividindo finalmente 16 por 2, virá para quociente 8, e para resto zero. Será por tanto 2, que é o ultimo divisor e o penultimo resto, o maximo divisor commum procurado.

73. Se se desejar obter o maximo divisor commum entre tres ou mais numeros inteiros, o processo reduz-se a repetir

o anteriormente exposto, um certo numero de vezes. Exemplo: Achar o maximo divisor commum entre os numeros 618, 412, 310, e 26.

Procederemos d'esta fórma: *acharemos o maximo divisor commum entre os dois primeiros, depois entre este maximo divisor commum e o terceiro numero; em seguida entre o resultado obtido e o quarto.* Isto é, acharemos o maximo divisor entre 618 e 412, que é 206; entre 206 e 310, e acharemos 2; e entre 2 e 26, e teremos 2. E' este o maximo divisor commum dos numeros dados.

74. Poderemos achar o maximo divisor commum de tres ou mais numeros inteiros, dividindo-os a todos com exclusão do menor por este menor. Acharemos assim restos a que se faria o mesmo que aos numeros dados, isto é, que se dividiriam todos menos o menor pelo menor d'elles; e assim successivamente, até se obter um resto só. Este seria o maximo divisor commum pedido.

Tomemos, para exemplificar, os numeros 618, 412, 310, e 26. Dividindo 618, 412, 310 por 26, obteremos respectivamente os restos 20, 22, 24. Dividindo os dois maiores d'estes restos, 24 e 22, por 20, acharemos os novos restos 4 e 2. Se dividirmos, porfim, 4 por 2, ter-se-ha para maximo divisor commum, 2.

75. O processo do maximo divisor commum póde simplificar-se, quando entre os numeros dados houver factores communs faceis de tirar. Por exemplo, os numeros 618, 412, 310 e 26, são todos divisiveis por 2. Fazendo pois as divisões por este numero, teremos os quocientes respectivos: 309, 206, 155, e 13, com os quaes trabalharemos como acima se ensinou, tendo cuidado de multiplicar o maximo divisor commum que acharmos para estes numeros pelo factor 2. Se houvessemos separado ou tirado mais factores communs, o que no exemplo sujeito se não fez por não os haver, deveriamos multiplicar pelo seu producto o maximo divisor commum achado.

76. *O menor multiplo commum* de dois ou mais numeros inteiros *é o menor numero que por todos elles fôr divisivel.* Exemplo: o menor multiplo commum de 4, 15, e 28, será 420, por que nenhum numero menor do que 420 se póde dividir por aquelles numeros.

77. Para achar o menor multiplo commum de dois numeros inteiros *procuraremos o maximo divisor commum entre ambos, e dividiremos um d'elles por este maximo divisor commum. Multiplicando depois o quociente obtido pelo outro, o producto será o menor multiplo commum procurado.*

Exemplo: Achar o menor multiplo commum de 12 e 28. Procuraremos o maximo divisor commum d'estes numeros, que é 4. Dividindo um d'elles, 28 por exemplo, por 4, multiplicaremos o quociente 7 pelo outro, 12, e teremos que o producto 7×12 ou 84, é o menor multiplo commum que se deseja.

78. Se quizermos achar o menor multiplo commum entre diversos numeros inteiros, procuraremos o menor multiplo commum entre dois d'elles, depois entre o resultado obtido e o terceiro; entre o novo resultado e o quarto, etc. O ultimo menor multiplo commum que se achar é o menor multiplo commum dos numeros dados.

Exemplo: Achar o menor multiplo commum dos numeros 4, 15, e 28. O menor multiplo commum dos dois primeiros é 60; e procurando o menor multiplo commum entre 60 e 28, tendo achado que o maximo divisor commum é 4, dividindo 60 por 4 obteremos 15, que multiplicado por 28 dá 420, que é o menor multiplo commum que se pede.

79. Quando dois ou mais numeros forem primos entre si, o seu menor multiplo commum será o seu producto. Exemplo: o menor multiplo commum de 3 e 7, é 21; o de 4, 5, e 7, será 140.

80. Quando o maior de dois numeros fôr divisivel pelo menor, o menor multiplo commum de ambos será o maior d'elles. Exemplo: o menor multiplo commum de 28 e de 7 é 28, por ser 28 divisivel por 7.

§ 12.º—Dos Quebrados em geral

81. Já definimos *quebrado* ou numero fraccionario (§ 1.º n.º 5) dizendo que era numero que representava partes eguaes da unidade. Dividindo pois a unidade em quatro partes eguaes, e tomando d'ellas apenas tres, formaremos um numero fraccionario da mesma unidade, e teremos o quebrado $\frac{3}{4}$ (que se lê: *tres quartos.*)

82. Como se vê, a notação empregada para representar um quebrado consiste em escrever o numero de partes em que se dividiu a unidade por baixo do que indicar quantas d'essas partes consideramos. Exemplo: $\frac{5}{7}$ indicará que se dividiu a unidade em 7 partes, e que d'estas 7 partes só tomámos ou considerámos 5. Ao numero que designar em quantas partes

se dividiu a unidade, chama-se *denominador*; ao que *numera* ou *conta* as que se tomaram, *numerador*.

83. Quando o denominador de um quebrado fôr algarismo digito, ou o numero 10, a leitura d'esse denominador apresentará differentes nomes, consoante os algarismos que o formarem. Assim, por exemplo, se fôr 2, como no quebrado $\frac{3}{2}$ lê-se tres *meios*; se fôr 3, como em $\frac{2}{3}$ lê-se dois *terços*; se fôr 4, como em $\frac{3}{4}$, lê-se tres *quartos*; se fôr 5, como em $\frac{6}{5}$, diz-se seis *quintos*; quando fôr 7, lê-se *setimos*; quando fôr 8, lê-se *oitavos*; sendo 9, diz se *nonos*; e sendo 10, *decimos*. Quando o denominador fôr numero maior do que 10, lêr-se-ha o numero segundo as regras dadas para a sua leitura (§ 2.º n.º 10), juntando-lhe logo a palavra *avos*. Exemplo: $\frac{6}{117}$, lê-se: *seis, cento e dezesete avos*; etc.

84. Da decomposição ou divisão da grandeza tomada para unidade em partes eguaes, e da repetição d'uma d'essas partes, resulta um numero que se representa por um quebrado. E' portanto clarissimo que applicando isto mesmo a uma grandeza que não seja a que se tomou para unidade, poderemos representar o resultado tambem por um quebrado. D'aqui vem a distincção entre *quebrados da unidade*, ou simplesmente *quebrados*, *quebrados d'inteiros*, e *quebrados de quebrados*. O quebrado $\frac{2}{5}$ da libra é um quebrado da unidade, por que representa duas partes das cinco em que se dividiu a libra; $\frac{2}{5}$ de vinte libras, é um quebrado d'inteiro, porque comprehende duas partes das quaes cinco perfazem vinte libras; $\frac{2}{5}$ de meia libra, é um quebrado de quebrado, por comprehender duas partes das quaes cinco dão metade da libra.

85. Já dissémos (§ 1.º n.º 5) o que era *quebrado proprio e quebrado improprio*, e vimos que quebrado proprio era o que tinha o numerador menor do que o denominador, como $\frac{2}{9}$; e

que quebrado improprio era aquelle cujo denominador fosse maior do que o numerador, como $\frac{6}{4}$ O quebrado cujos termos (e chamam-se *termos* aos dois numeros que formam um quebrado) são eguaes entre si, é egual á unidade, como $\frac{4}{4}$; porque tendo tomado tantas partes, 4, quantas foram aquellas em que a unidade foi dividida, 4, recompuzemos evidentemente a unidade.

86. Sendo *improprio* um quebrado, é claro que contêm em si uma ou mais vezes a unidade. Como póde haver conveniencia ou necessidade d'extrahir a unidade, ou numero de unidades, ou *inteiros*, que se contéem n'um quebrado improprio, daremos para isso a seguinte regra: *dividiremos o numerador pelo denominador, e formaremos um numero mixto* (§ 1.º n.º 5), *sendo o inteiro o quociente incompleto que achámos, o numerador do quebrado o resto da divisão, e o denominador o divisor.*

Exemplo: extrahir os inteiros ao quebrado $\frac{17}{3}$

Dividiremos 17 por 3, o que dá 5 para quociente incompleto, e 2 para resto. Teremos pois: $\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$; ou como se usa tambem: $\frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$

Reciprocamente para reduzir um numero mixto a quebrado, *multiplicaremos o inteiro pelo denominador e juntaremos ao producto o numerador, dando a esta somma para denominador o do quebrado.*

Exemplo: reduzir a quebrado o numero mixto $9\frac{2}{7}$

Multiplicaremos 9 por 7, o que dá 63, e juntar-lhe-hemos 2, obtendo 65. A este numero 65 dar-se-ha por denominador 7. Isto é, $9\frac{2}{7} = \frac{65}{7}$

87. Podemos querer dar a um numero inteiro a fórma de quebrado, ou com o denominador 1, ou com o denominador egual a um numero qualquer. No primeiro caso *escreveremos o numero dado sobre um traço, e por baixo o numero 1.* Exem-

plo: $36 = \frac{36}{1}$ No segundo caso, *multiplicaremos o inteiro pelo numero que deve servir-lhe de denominador, e daremos este numero para denominador do producto.*

Exemplo: Dar ao inteiro 7, o denominador 12, sem alterar o valor do inteiro.

Multiplicaremos 7 por 12, o que dá 84, e escreveremos 84 sobre 12. Assim: $7 = \frac{84}{12}$

88. De dois quebrados, cujos denominadores sejam eguaes, será maior o que tiver *maior* numerador. Exemplo: de $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{4}$ é maior o primeiro, por ser 3 maior do que 2.

E de dois quebrados de numeradores eguaes, será maior o que *menor* denominador tiver. Exemplo dos quebrados $\frac{3}{9}$ e $\frac{3}{7}$ será maior o segundo $\frac{3}{7}$; porque, quanto menor fôr o numero de partes em que se dividir a unidade, maior será cada uma d'essas partes.

89. Para tornar um quebrado certo numero de vezes maior, *multiplicaremos o numerador, ou dividiremos o denominador, por esse numero.*

Por exemplo, para tornar 3 vezes maior o quebrado, $\frac{4}{9}$ ou multiplicaremos 4 por 3, dando ao producto o denominador 9, obtendo $\frac{12}{9}$; ou dividiremos o denominador 9 por 3, e daremos este quociente para denominador de 4.

Isto é: $\frac{4}{9:3} = \frac{4}{3}$

90. Para tornar um quebrado certo numero de vezes menor, *dividiremos o numerador, ou multiplicaremos o denominador, por esse numero.*

Exemplo: tornar o quebrado $\frac{6}{7}$ duas vezes menor, ou dividiremos 6 por 2, o que dá 3, dando a 3 o denominador 7, obtendo $\frac{6:2}{7}=\frac{3}{7}$ ou multiplicaremos o denominador 7 por 2, o que dá 14, ficando este producto denominador de 6. Isto é: $\frac{6}{7\times 2}=\frac{6}{14}$

91. Dos n.os 89 e 90 conclue-se que *multiplicando ou dividindo os dois termos de um quebrado pelo mesmo numero, o quebrado não mudará de valor.* Assim por exemplo, o quebrado $\frac{3}{8}$ é egual a $\frac{3\times 5}{8\times 5}$ que é egual tambem a $\frac{3:5}{8:5}$

92. *O quociente de um numero por outro é egual a um quebrado cujo numerador é o dividendo, e cujo denominador é o divisor.* Por exemplo: $13:14=\frac{13}{14}$

D'isto se conclue que para completar o quociente de uma divisão inexacta, juntaremos ao quociente incompleto achado o quebrado resultante do resto da divisão para numerador, e do divisor para denominador. Exemplo: dividindo 12 por 5, obteremos de quociente 2, e de resto 2. Isto é: $12:5=$ $=\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}$

§ 13.º — Da simplificação dos quebrados, e da sua reducção ao mesmo denominador.

93. Simplificar *um quebrado, ou reduzil-o á sua expressão mais simples, é achar outro de termos menores que os do primeiro, mas de valor egual.* Um quebrado diz-se *irreductivel,* quando já não póde simplificar-se.

94. A simplificação dos quebrados é em geral conveniente antes de effectuar qualquer operação sobre elles. Esta simplificação effectua-se *applicando as regras da divisibilidade aos dois termos do quebrado, simultaneamente. Isto é, dividil-os-hemos por 2, ou por 3, ou por 5, ou por 7, ou por 11, ou por estes divisores todos, se por acaso os dois termos do quebrado forem divisiveis. Como não ha regra para a divisibilidade dos numeros por divisores primos superiores a 11, feita a divisão por este numero, procuraremos o maximo divisor commum entre os dois termos do ultimo quebrado, e dividiremos esses dois termos pelo maximo divisor commum d'elles. O quebrado, forma-*

do pelos dois quocientes respectivamente obtidos, é irreductivel. Por exemplo: simplificar o quebrado: $\frac{810810}{1051050}$

Como os dois termos d'este quebrado terminam por *zero*, que é considerado como numero par, serão divisiveis por 2 e por 5, e portanto por 10. Dividiremos pois ambos os termos por 10, cortando os zeros no numerador e denominador, obtendo: $\frac{81081}{105105}$ Tendo extrahido os noves aos dois termos, e vendo que os restos são *zero* e *três* respectivamente, concluiremos que são divisiveis por 3, e effectuando a divisão obteremos $\frac{27027}{35035}$ Ensaiando a divisão por 7, visto não haver regra, vemos que os dois termos são divisiveis, e effectuada ella, teremos: $\frac{3861}{5005}$ Veremos tambem que o quebrado é simplicavel por 11, porque os restos de seus termos por este numero são zero. Fazendo a divisão tem-se: $\frac{351}{455}$ Procuraremos agora pelo methodo sabido, o maximo divisor commum entre 351 e 455, e acharemos 13. Dividindo pois aquelles termos por 13, acharemos 27 e 35. Logo o quebrado $\frac{27}{35}$ é irreductivel.

As divisões dos dois termos do quebrado a simplificar pelos divisores 2, 3, 5, 7 e 11, fazem-se *emquanto* esses termos forem divisiveis, não se passando a um divisor sem que o anterior já não divida os mesmos dois termos.

95. Reduzem-se quebrados ao mesmo denominador, *multiplicando os dois termos de cada um pelo producto dos denominadores dos outros.* Assim, por exemplo, reduziremos os quebrados $\frac{3}{7}, \frac{2}{9}, \frac{3}{8}$, ao mesmo denominador, d'esta fórma:

$$\frac{3\times9\times8}{7\times9\times8}, \frac{2\times7\times8}{9\times7\times8}, \frac{3\times9\times7}{8\times9\times7}$$

ou, effectuando:

$$\frac{216}{504}, \frac{112}{504}, \frac{189}{504}$$

96. A reducção de quebrados ao mesmo denominador é o meio mais geral de os comparar. Por exemplo, para vermos qual dos dois quebrados $\frac{6}{7}$ e $\frac{3}{5}$ é o maior, reduzil-os-hemos ao mesmo denominador: $\frac{6 \times 5}{7 \times 5}$ e $\frac{3 \times 7}{7 \times 5}$ ou $\frac{30}{35}$ e $\frac{21}{35}$

Portanto, o primeiro é o maior.

97. Poderemos querer reduzir quebrados ao mesmo denominador, com a condição de que tal denominador seja *o menor* possivel. Para isto, *reduziremos os quebrados propostos á sua expressão mais simples, procuraremos o menor multiplo commum dos denominadores, dividiremos o menor multiplo commum que acharmos pelo denominador de cada quebrado, e multiplicaremos os seus dois termos pelo quociente respectivamente obtido.* Exemplo: reduzir ao menor denominador commum os quebrados: $\frac{9}{15}, \frac{4}{26}, \frac{15}{25}$

Reduziremos estes quebrados á sua mais simples expressão. Teremos: $\frac{3}{5}, \frac{2}{13}, \frac{3}{5}$ O menor multiplo commum dos denominadores é 65. Dividiremos 65 por 5, que é o denominador do primeiro quebrado, e obteremos 13, que, multiplicado pelos dois termos d'elle, dá $\frac{39}{65}$ Fazendo o mesmo para o segundo e terceiro, achar-se-ha $\frac{10}{65}$, e $\frac{39}{65}$, respectivamente.

98. Quando se hajam reduzido ao mesmo denominador quebrados que não estejam simplificados, poderemos simplificál-os de modo que continuem a ter um denominador commum. Para isto *dividiremos os dois termos de cada quebrado pelo maximo divisor commum de todos os termos.*

Exemplo: simplificar $\frac{72}{180}$ e $\frac{120}{180}$, de modo que continuem tendo um denominador commum.

Procuraremos o maximo divisor commum entre 72, 120, e 180, e acharemos 12. Dividindo os dois termos de cada quebrado por 12, obteremos os seguintes: $\frac{6}{15}$ e $\frac{10}{15}$, mais simples do que $\frac{72}{180}$ e $\frac{120}{180}$

§ 14° — Das operações sobre quebrados

99. **Addição**. Sommam-se quebrados que têem o mesmo denominador, *sommando os numeradores e dando á somma o denominador commum.*

Exemplo: $\frac{2}{7}+\frac{5}{7}+\frac{10}{7}=\frac{2+5+10}{7}=\frac{17}{7}$

100. Quando os denominadores forem differentes, *reduzir-se-hão primeiro ao mesmo denominador, e praticar-se-ha depois a regra dada.*

Exemplo: $\frac{4}{9}+\frac{3}{5}=\frac{20}{45}+\frac{27}{45}=\frac{20+27}{45}=\frac{47}{45}$

101. Para sommar inteiros com quebrados, e vice-versa, praticaremos o que fica preceituado para a reducção de numeros mixtos a quebrados.

Exemplo: $14+\frac{3}{9}$ ou $\frac{3}{9}+14=\frac{14\times 9+3}{9}=\frac{129}{9}$

102. Na pratica, para achar a somma de varias parcellas, umas inteiras, fraccionarias outras, é ordinariamente preferivel sommar todas as parcellas inteiras, em seguida todas as fraccionarias, e addicionar depois as duas sommas.

Exemplo: sommar $3+\frac{5}{7}+2+9+\frac{2}{5}+\frac{3}{4}+8.$

Teremos: $(3+2+9+8)+\left(\frac{5}{7}+\frac{2}{5}+\frac{3}{4}\right)=22+\frac{261}{140}$

$=\frac{22\times 140+261}{140}=\frac{3341}{140}$

103. Conclue-se do exposto, que para sommar numeros mixtos poderemos proceder de dois modos: *ou sommar os quebrados extrahindo os inteiros á somma, se pudér ser, e juntando esses inteiros extrahidos á somma dos outros; ou reduzir os numeros mixtos a quebrados, e sommar estes segundo a regra.*

Exemplo: $2\frac{5}{9}+3\frac{4}{8}=\left(\frac{5}{9}+\frac{4}{8}\right)+(2+3)=\frac{40+36}{72}+5$

$=\frac{76}{72}+5=6\frac{4}{72}$; ou $2\frac{5}{9}+3\frac{4}{8}=\frac{23}{9}+\frac{28}{8}=\frac{436}{72}=6\frac{4}{72}$

104. **Subtracção.** Para subtrahir quebrados que têem o mesmo denominador, *subtrahem-se os numeradores, e dá-se á differença o denominador commum.*

Exemplo: $\frac{5}{9} - \frac{3}{9} = \frac{5-3}{9} = \frac{2}{9}$

105. Quando os denominadores forem differentes, *reduzir-se-hão os quebrados ao mesmo denominador, e praticar-se-ha depois a regra dada.*

Exemplo: $\frac{8}{9} - \frac{2}{5} = \frac{40-18}{45} = \frac{22}{45}$

106. Se algum dos termos da subtracção fôr inteiro, *far-se-ha a operação como se o inteiro fosse um quebrado de denominador 1.* Exemplos: 1.º Additivo inteiro: $6 - \frac{2}{7} = \frac{6}{1} - \frac{2}{7} = \frac{7 \times 6 - 2 \times 1}{1 \times 7} = \frac{42-2}{7} = \frac{40}{7}$; 2.º Subtractivo inteiro: $\frac{16}{5} - 3 = \frac{16}{5} - \frac{3}{1} = \frac{16 \times 1 - 5 \times 3}{5 \times 1} = \frac{1}{5}$; 3.º Additivo egual a 1: $1 - \frac{3}{4} = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}$

107. Para subtrahir numeros mixtos, *reduzil-os-hemos á fórma de quebrados, praticando-se depois a regra dada.*

Exemplo: $4\frac{2}{3} - 2\frac{3}{5} = \frac{14}{3} - \frac{13}{5} = \frac{70-39}{15} = \frac{31}{15} = 2\frac{1}{15}$

108. Quando se quer achar o valor de uma expressão composta de addições e subtracções d'inteiros e quebrados, ou *se reduzem os inteiros a quebrados, reduzindo depois estes ao mesmo denominador, e praticando as operações indicadas pelos signaes;* ou *se operará primeiramente sobre os inteiros reduzindo-os a um numero só, e depois sobre os quebrados egualmente, sommando ou subtrahindo em seguida, segundo a indicação dos signaes, os numeros dados.*

Exemplo: Achar o valor da expressão: $9 + \frac{2}{3} - 3 - \frac{5}{9}$

1.º modo: $9 + \frac{2}{3} - 3 - \frac{5}{9} = \frac{9}{1} + \frac{2}{3} - \frac{3}{1} - \frac{5}{9}$
$= \frac{243 + 18 - 81 - 15}{27} = \frac{261 - 96}{27} = \frac{165}{27} = 6\frac{1}{9}$

2.º modo: $9+\frac{2}{3}-3-\frac{5}{9}=(9-3)+\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\right)$
$=6+\frac{3}{27}=6\frac{1}{9}$

109. **Multiplicação.** Para multiplicar um quebrado por um inteiro, ou vice-versa, *multiplica-se o inteiro pelo quebrado e dá-se ao producto para denominador o do quebrado.* Exemplo:
$6\times\frac{2}{7}$, ou $\frac{2}{7}\times 6$, é egual a $\frac{12}{7}$, ou $1\frac{5}{7}$

110. O producto de dois ou mais quebrados obtem-se *multiplicando-os termo a termo.* Exemplo: $\frac{3}{5}\times\frac{4}{9}\times\frac{5}{6}$
$=\frac{3\times4\times5}{5\times9\times6}=\frac{60}{270}=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$

111. Multiplicam-se numeros mixtos, *reduzindo-os primeiramente á fórma de quebrado, e applicando depois a regra.* Exemplo: $3\frac{4}{7}\times 5\frac{2}{9}=\frac{25}{7}\times\frac{47}{9}=\frac{25\times47}{63}=\frac{1175}{63}=18\frac{41}{63}$

112. **Divisão.** Para dividir um inteiro por um quebrado, *multiplica-se o inteiro pelo quebrado invertido.* Exemplo:
$7:\frac{3}{8}=7\times\frac{8}{3}=\frac{7\times8}{3}=\frac{56}{3}=18\frac{2}{3}$

113. O quociente da divisão de um quebrado por um inteiro, obtem-se *multiplicando o quebrado pela unidade dividida pelo inteiro.* Exemplo: $\frac{5}{9}:4=\frac{5}{9}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{36}$

114. Dividem-se dois quebrados, ou *invertendo os termos ao quebrado divisor e praticando a regra da multiplicação;* ou *dividindo-os termo a termo.* Exemplo: $\frac{6}{35}:\frac{2}{5}=\frac{6}{35}\times\frac{5}{2}$
$=\frac{30}{70}=\frac{3}{7}$; ou $\frac{6}{35}:\frac{2}{5}=\frac{6:2}{35:5}=\frac{3}{7}$

Esta ultima regra só se applica com vantagem quando os dois quebrados são divisiveis termo a termo.

115. Para dividir numeros mixtos, *reduzem-se primeiro á fórma de quebrados, e applica-se-lhes depois a regra.* Exemplo:
$2\frac{5}{7}:6\frac{3}{4}=\frac{19}{7}:\frac{27}{4}=\frac{19}{7}\times\frac{4}{27}=\frac{76}{189}$

§ 15.º — Dos numeros decimaes em geral

116. Numero decimal é o que exprime quantas *partes decimaes* da unidade existem em qualquer grandeza.

Para se estabelecerem os numeros decimaes, admittem-se unidades de diversas ordens denominadas *decimas, centesimas, millesimas, decimas millesimas, centesimas millesimas*, etc., contendo cada uma 10 unidades da ordem immediatamente inferior.

As unidades decimaes têem os seguintes nomes e valores:

Uuidade	vale 10 decimas.
Decima da unidade, ou simplesmente *decima*......	» 10 centesimas.
Centesima da unidade, ou simplesmente *centesima*	» 10 millesimas.
Millesima	» 10 decimas millesimas.
Decima millessima.......	» 10 centesimas millesimas.
Centesima »	» 10 millionesimas.
Millionesima...........	» 10 decimas millionesimas.
Decima millionesima....	» 10 centesimas millionesimas.
Centesima »	» 10 billionesimas.
Billionesima...........	» 10 decimas billionesimas.
Decima billionesima.....	» 10 centesimas billionesimas
Centesima »	» 10 trillionesimas.
Trillionesima...........	» 10 decimas trillionesimas.
Decima trillionesima.....	» 10 centesimas trillionesimas
Centesima »	» 10 quatrillionesimas.
etc.	etc.

Para escrever os numeros decimaes empregam-se os dez algarismos já mencionados para os numeros inteiros, tomando por base as seguintes convenções: 1.ª Collocar uma virgula á direita do algarismo das unidades inteiras de primeira ordem; 2.ª escrever o algarismo que representa *decimas* logo immediatamente á virgula; o das *centesimas* em seguida a este; logo depois o das *millesimas*, etc., por fórma que qualquer algarismo represente unidades dez vezes maiores do que as representadas pelo immediatamente á direita; 3.ª collocar zeros nos logares correspondentes ás unidades que faltam no numero.

Portanto, o numero 43,5427 incerra 43 *unidades, cinco decimas, quatro centesimas, duas millesimas, sete decimas millesimas.*

117. Para ler qualquer numero decimal, *lê-se primeiramente a parte inteira, se a houver, e depois divide-se a parte decimal em classes de tres algarismos a começar da virgula para a direita. A primeira classe de tres algarismos immediata á virgula é a classe das millesimas representadas pelo ultimo algarismo da direita da mesma classe; a segunda termina em millionesimas; a terceira em billionesimas, etc.*

Exemplo: ler 27,456527329.

Divide-se o numero em classes de tres algarismos d'esta fórma: 27,456'527'329; lê-se depois, dizendo: 27 *unidades; 456 millesimas,* 527 *millionesimas,* 329 *billionesimas.*

Um numero decimal póde tambem ler-se *como os numeros inteiros, acompanhando o ultimo algarismo da direita do nome da unidade representada por elle.* O numero supra lê-se pois tambem assim: 27 unidades, 456 milhões, 527 mil, 329 billionesimas.

Ainda se póde ler d'outro modo, *mencionando cada algarismo e as unidades que elle representar.* Leremos pois o numero indicado, segundo este preceito, assim: 27 unidades, 4 decimas, 5 centesimas, 6 millesimas, etc.

No 2.º e 3.º modos supra-mencionados para a leitura de numeros decimaes, póde incorporar-se o numero de unidades inteiras. Leremos, portanto, o exemplo dado, como segue: 27 billiões, 456 milhões, 527 mil, 329 billionesimas.

118. Os algarismos escriptos á direita da virgula chamam-se *casas de dizima.*

Qualquer numero decimal póde representar-se por um quebrado ordinario, tomando para numerador o numero sem a virgula e para denominador a unidade seguida de tantos zeros quantos as casas de dizima do numero dado.

$$\text{Exemplo: } 0{,}527 = \frac{527}{1000};\ 0{,}25 = \frac{25}{100};\ 6{,}3429 = \frac{63429}{10000}$$

119. O valor de qualquer numero decimal não varia embora se colloquem ou tirem zeros á direita do mesmo numero.

Exemplo: 6,35 = 6,3500; 0,2550 = 0,255; 16,45000 = 16,45.

120. Quando se pretende tornar um numero decimal 10, 100, 1000, etc., vezes maior, *bastará passar a virgula* 1, 2, 3, etc., *casas para a direita.* Pelo contrario, quando quizermos tornar um numero decimal 10, 100, 1000, etc., vezes menor, *passaremos a virgula* 1, 2, 3, etc., *casas para a esquerda.* Em ambos os casos a virgula mudará de posição tantas casas quantas os zeros da potencia de 10 multiplicadora. Exemplos:

$0,5427 \times 10 = 5,425$; $0,39 \times 1000 = 390$; $1,5 \times 10 =$ [illegible];
$14,56 : 10 = 1,456$; $15,17 : 100 = 0,1517$;
$98,5427 : 1000 = 0,0985427$.

121. Dizem-se os numeros decimaes da mesma *especie numerica*, quando em todos fôr egual o numero de casas de dizima. Exemplo: 0,627; 5,439; são numeros decimaes da mesma especie numerica.

A reducção de numeros decimaes á mesma especie numerica faz-se *juntando ou tirando zeros á direita dos mesmos numeros, até egualar as casas de dizima em todos.* Isto equivale a reduzir quebrados ao mesmo denominador, porque um numero decimal equivale a um quebrado.

§ 16.º — Das operações sobre os numeros decimaes

122. **Addição.** Sommam-se numeros decimaes, *collocando uns por baixo dos outros por fórma que as unidades da mesma ordem fiquem em columna vertical, o que se consegue fazendo com que as virgulas fiquem assim dispostas* Exemplo:
$26,42 + 0,4567 + 274,532 + 0,027 + 0,42$.

$$\begin{array}{r} 26,42 \\ 0,4567 \\ 274,532 \\ 0,027 \\ 0,42 \\ \hline 301,8557 \end{array}$$

Collocam-se as parcellas em columna vertical, de modo que as virgulas se correspondam, e faz-se a somma como se fossem numeros inteiros; separando depois na somma total 301,8557, tantas casas de dizima a contar da direita quantas tiver a parcella de maior numero d'ellas.

123. **Subtracção.** Subtrahem-se numeros decimaes, *como os numeros inteiros, collocando-os de modo que as virgulas fiquem na mesma columna vertical.* Exemplo: $29,437 - 16,52$.

$$\begin{array}{r} 29,437 \\ 16,520 \\ \hline 12,917 \end{array}$$

Dispõem-se os numeros como na subtracção de inteiros, e faz-se a operação como se o fossem, separando no resto as casas de dizima que houver nos dois termos. Se estes não são da mesma especie numerica, reduzem-se a ella, como acima se disse (n.º 119).

124. **Multiplicação.** Multiplicam-se decimaes *como se fossem inteiros, sem fazer caso das virgulas, separando depois no producto tantas casas para a dizima, quantas existirem nos dois factores.* Exemplo: $27,45 \times 0,39$.

Multiplicamos 27,45 por 0,39, como se fossem inteiros, e separamos no producto quatro casas para a dizima, visto como cada factor tem duas.

Esta regra applica-se ainda ao caso em que um dos factores é inteiro.

27,45
0,39
24705
8235
10,7055

125. Divisão. Na divisão de decimaes temos de considerar dois casos: 1.º quando o divisor fôr inteiro; 2.º quando fôr decimal.

Quando o divisor é inteiro, *dividem-se os numeros decimaes sem fazer caso das virgulas, como se faz com os inteiros, separando no quociente tantas casas para a dizima quantas forem as do dividendo.* Exemplo: dividir 16,537 por 12.

16,537	12
45	1,378
93	
97	
1	

Dividimos o dividendo 16,537 pelo divisor 12, ao modo ordinario, e faremos representar ao quociente millesimas, isto é, separaremos tres casas para a dizima.

Quando o divisor fôr decimal, reduziremos então a operação ao caso anterior, *tornando o divisor inteiro; para o que se passará a virgula tantas casas para a direita no dividendo quantas forem as do divisor.* Exemplo: dividir 64,54379 por 63,9325.

645437,9	639325
6112 9	1,0

Dividimos, como fossem inteiros, os numeros 645437,9 e 639325, tendo corrido em cada um a virgula 4 casas para a direita. Como o dividendo tem um só algarismo decimal, faremos com que o quociente exprima decimas. Será pois 1,0.

126. Se o dividendo fôr inteiro, ou tiver menos casas de dizima do que o divisor, escrever-se-hão zeros sufficientes á direita d'aquelle para poder passar-se a virgula para a direita, como fica indicado.

Quando as casas de dizima forem em egual numero tanto no dividendo como no divisor, supprimem-se as virgulas, e faz-se a divisão ao modo ordinario. O quociente incompleto, como é manifesto, será inteiro quando o dividendo fôr superior ao divisor, e decimal no caso contrario.

127. Tanto nas divisões de inteiros, como nas de decimaes, em que haja resto, póde a divisão continuar-se para se obter mais casas de dizima no quociente; *o que se consegue escrevendo um zero á direita de cada resto que fôr apparecendo, e continuando a dividir.* Exemplos:

```
179,17 | 15          37,0 | 48
 29    |-------      340  |-------
 141   | 11,9446     400  | 0,7708
   67                 16
    70
    100
     10
```

128. Se as divisões nunca chegam a fazer-se exactamente, o quociente constitue uma *dizima illimitada;* no caso contrario, a dizima será *limitada.*

129. Um quebrado ordinario reduz-se a dizima *dividindo o numerador pelo denominador ao modo ordinario.* O quociente é a dizima. Exemplo: $\frac{2}{7} = 0{,}28571$.

```
20 | 7
60 |---------
 40| 0,28571
  50
   10
    3
```

Feita a divisão de 2 por 7, achámos para quociente incompleto 0,28571. Se quizessemos mais casos de dizima, continuariamos a divisão juntando á direita de cada resto um zero.

§ 17.º — Do systema metrico

130. Chama-se *systema metrico* ao conjuncto de todas as medidas baseadas no metro.

Metro é a medida de extensão cujo comprimento equivale á decima millionesima parte do quarto do meridiano terrestre depois de rectificado, e supposto medido sobre a superficie das aguas tranquillas.

131. O systema metrico comprehende differentes especies de medidas, a saber: *medidas de extensão linear,* ou *comprimento; medidas de superficie; medidas de volume; medidas de capacidade; medidas de peso; medidas de dinheiro; medidas circulares.*

132. **Medidas de comprimento.**— A unidade principal d'estas medidas é o metro. Ha, porêm, alêm d'estas, outras unidades, umas maiores *(multiplos do metro),* e outras menores *(submultiplos do metro).*

Os multiplos e sub-multiplos do metro formam com elle uma serie de medidas, cada uma das quaes é 10 vezes maior do que immediatamente inferior, e 10 vezes menor do que a imme-diatamente superior. Procedem pois estas medidas umas a respeito das outras de 10 em 10.

Obtêem-se os nomes dos multiplos do metro fazendo preceder a palavra — metro — dos vocabulos de origem grega: *deca, hecto, kilo,* e *myria,* cuja significação é 10, 100, 1000, e 10000, respectivamente. Os nomes dos sub-multiplos formam-se antepondo á mesma palavra — metro — as de origem latina: *deci, centi, milli,* cuja significação é tambem de 10, 100, e 1000, respectivamente.

Teremos pois os seguintes nomes, notações e valores das diversas unidades lineares:

Multiplos

Myriametro	(1^{Mm}),	equivale	a	10:000	metros	ou	10^{Km}
Kilometro	(1^{Km}),	»	»	1:000	»	»	10^{Hm}
Hectometro	(1^{Hm}),	»	»	100	»	»	10^{Dm}
Decametro	(1^{Dm}),	»	»	10	»	»	10^{m}
Metro	(1^{m}),	»	»	1	»	»	10^{dm}

Sub-multiplos

Decimetro	(1^{dm}),	equivale	a	0,1	metro	ou	10^{cm}
Centimetro	(1^{cm}),	»	»	0,01	»	»	10^{mm}
Millimetro	(1^{mm}),	»	»	0,001	»		

133. D'estas medidas, umas ha que têem applicações a certas distancias, para cuja medição as outras se não empregam. Temos pois que o myriametro, por exemplo, só se applica á medição de grande distancias itinerarias; o meio myriametro ou *legua metrica* (5:000 metros), e o kilometro, usam-se no trabalho de estradas, e para demarcar distancias menores do que as primeiras; o decametro e o hectometro empregam-se na agricultura, agrimensura e topographia; o metro, o decimetro, o centimetro, principalmente no commercio; o centimetro e o millimetro, para questões de grande exacção.

134. Tendo presente o systema de numeração decimal, e o que vimos de expôr no n.º 132 d'este §, facilmente se lerá ou escreverá qualquer numero multiplo ou submultiplo do metro linear. Tendo, por exemplo, medido uma extensão, e tendo-lhe incontrado 369 *myriametros,* mais 9 *kilometros,* mais 7 *decametros,* mais 3 *metros,* mais 2 *centimetros* e mais 4 *millimetros,* e querendo representar toda essa medida por um só numero, teremos em virtude das convenções estabelecidas: $3699073^{m},024$, referido ao metro como unidade.

Se quizessemos referir a outra unidade, que não ao metro este numero, — por exemplo, ao kilometro, — passariamos a virgula para depois do algarismo que indicar kilometros, escrevendo-lhe á direita e superiormente a nova designação. Como este algarismo é no numero dado 9, ficará assim o numero referido a esta unidade. Teremos pois $3699^{Km},073024$.

Querendo referir o mesmo numero a centimetros, virá $369907302^{cm},4$.

Concluiremos pois que para passar de uma unidade para outra menor ou maior do que a actual, *deveremos multiplicar ou dividir o numero pela unidade seguida de tantos zeros quantas forem as casas de dizima que vão da unidade actual, inclusive, até á nova unidade exclusive.*

135. **Medidas de superficie.** — A unidade principal d'estas medidas é o *metro quadrado,* isto é, um quadrado que tem de lado um metro.

As outras unidades de comprimento formam com o metro quadrado um complexo de medidas que procedem umas a respeito das outras de 100 em 100 unidades; isto é, cada uma vale 100 vezes mais do que a immediatamente inferior, e 100 vezes menos do que a immediatamente superior.

136. Das differentes medidas de superficie, umas são multiplas, outra ssub-multiplas do metro quadrado. Os seus nomes, notação e valores, são os seguintes:

Multiplos

Myriametro quad.	(1^{Mm2})	vale	100000000	met.	quad.	ou	100^{Km2}
Kilometro quad.	(1^{Km2})	»	1000000	»	»	»	100^{Hm2}
Hectometro quad.	(1^{Hm2})	»	10000	»	»	»	100^{Dm2}
Decametro quad.	(1^{Dm2})	»	100	»	»	»	100^{m2}
Metro quad.	(1^{m2})	»	1	»	»	»	100^{dm2}

Sub-multiplos

Decimetro quad.	(1^{dm2})	vale	0,01	met.	quad.	ou	100^{cm2}
Centimetro quad.	(1^{cm2})	»	0,0001	»	»	»	100^{mm2}
Millimetro quad.	(1^{mm2})	»	0,00001	»	»		

137. O metro quadrado é um quadrado que tem de lado um metro (n.º 135). Formando pois um quadrado que tenha 1 metro de lado, dividindo este lado em 10 partes eguaes ou decimetros, tirando pelos pontos de divisão rectas parallelas para o lado opposto, e fazendo a mesma construcção para os outros dois lados, obteremos 100 quadrados, cada um dos quaes terá de lado 1 decimetro. Isto é, formar-se-hão 100 decimetros qua-

drados. Applicando o mesmo ao quadrado que tenha de lado 1 decimetro, veremos que se formam 100 centimetros quadrados; que com o decametro se obtêem 100 metros quadrados, etc. E' preciso pois distinguir 1 decimetro quadrado, por exemplo, de 1 decimo do metro quadrado; 1 centimetro quadrado de 1 centesimo do metro quadrado, etc.

138. Tendo presentes as convenções dos n.^{os} 135 e 136, e as regras da numeração decimal, facil será escrever e ler qualquer numero referido a medidas de superficie. Assim, tendo medido uma superficie e achado 437 *myriametros quadrados*, 19 *kilometros quadrados*, 21 *hectometros quadrados*, 5 *metros quadrados*, 44 *centimetros quadrados* e 12 *millimetros quadrados*, e querendo representar estas differentes unidades por um só numero, ter-se-ha: 43719210005^{m2},004412, referido ao metro quadrado como unidade. Se quizessemos passar ou referir este numero a outra unidade maior ou menor do que o metro quadrado, *dividiriamos ou multiplicariamos o numero dado, a partir da virgula, por uma potencia de 100 que tivesse por expoente tantas unidades quantas as unidades de superficie que vão desde a actual, inclusive, até á nova unidade exclusive.* Por exemplo, referindo o numero dado ao myriametro quadrado, temos 437^{Mm2},19210005004412.

139. D'aqui se conclue que para se ler qualquer numero referido a unidades de superficie, *dividil-o-hemos em classes de dois algarismos a partir da virgula para a direita e para a esquerda, completando a ultima classe da direita com um zero quando ella só tiver um algarismo. A primeira classe da esquerda do numero póde ter mais de dois algarismos. O numero ou se lê classe por classe, juntando a cada uma o nome da unidade que ella representa, ou se lê como se fosse inteiro, juntando á ultima classe o nome da unidade que lhe pertence.*

140. As superficies agrarias, ou as que se destinam á agricultura, são medidas tomando por unidade principal o *are*, que equivale ao decametro quadrado. As outras unidades são o *hectare*, que vale 100 ares, e o *centiare*, que equivale á centesima parte do are, ou a 1 metro quadrado. Estas medidas dizem-se agrarias. A sua nomenclatura, notação e valores, são os seguintes:

Hectare	(1^{Ha})	vale	100	ares	ou	1^{Hm2}
Are	(1^{a})	»	1	are	»	1^{Dm2}
Centiare	(1^{ca})	»	0,01	»	»	1^{m2}

141. Medidas de volume.—A unidade principal d'estas medidas é o *metro cubico*, isto é, o volume egual ao de u cubo que tenha de aresta um metro.

As outras unidades de volume formam com o metro cubic um conjuncto de medidas, que procedem de 1000 em 1000 uma a respeito das outras; isto é, cada unidade vale 1000 veze mais do que a immediatamente inferior, e 1000 vezes meno do que a immediatamente superior.

142. Das differentes medidas de volume, umas são multi plas, outras sub-multiplas do metro cubico. Os seus nomes, no tação e valores, são os seguintes:

Multiplos

Myriametro cubico	(1^{Mm3})	vale	1000000000000^{m3}	ou	1000^{Km3}
Kilometro cubico	(1^{Km3})	»	1000000000^{m3}	»	1000^{Hm3}
Hectometro cubico	(1^{Hm3})	»	1000000^{m3}	»	1000^{Dm3}
Decametro cubico	(1^{Dm3})	»	1000^{m3}	»	1000^{m3}
Metro cubico	(1^{m3})	»	1^{m3}	»	1000^{dm3}

Submultiplos

Decimetro cubico	(1^{dm3})	vale	0^{m3},001	ou	100^{cm3}
Centimetro cubico	(1^{cm3})	»	0^{m3},000001	»	100^{mm3}
Millimetro cubico	(1^{mm3})	»	0^{m},000000001		

143. O metro cubico é o volume egual ao de um cubo qu tenha de aresta um metro. Se decompuzermos um metro qua drado em 100 decimetros quadrados, e assentarmos sobre cad decimetro quadrado um cubo, obteremos uma camada de 10 cubos, cuja aresta é egual a 1 decimetro, isto é, 100 decime tros cubicos. Se sobre esta camada puzermos outra egual, so bre a segunda uma terceira, e assim successivamente até 1 camadas, obteremos 10 camadas de 100 decimetros cubico cada uma, ao todo 1000 decimetros cubicos. O mesmo se ob teria com o decimetro cubico, com o centimetro cubico, etc. E preciso pois não confundir, por exemplo, 0,2 do metro cubic com 1 decimetro cubico.

144. Tendo presentes as convenções dos n.os 141 e 142, e as regras da numeração decimal, com facilidade se poderá le um numero referido a medidas de volume. Assim, por exem plo, querendo representar por um só numero as seguinte quantidades: 22436^{Mm3}, 367^{Km3}, 42^{Dm3}, 546^{m3}, 2^{dm3} e 549^{mm3}, teremos: 22436^{Mm3},36700004 546002000549, referido ao my riametro cubico. Se quizessemos referir este numero a outr unidade differente do myriametro cubico, *dividiriamos ou mul tiplicariamos conforme se quizesse passar, para unidade maio*

ou menor, o numero a partir da virgula por uma potencia de 1000 que tivesse por expoente tantas unidades quantas as unidades que vão desde a actual, inclusive, até á nova exclusive. Por exemplo, referindo o numero dado ao metro cubico, virá 22436367000042546^{m3},002000549.

145. D'aqui se conclue que para ler qualquer numero de unidades de volume, *dividil-o-hemos em classes de 3 algarismos a partir da virgula para a direita oũ para á esquerda, completando a ultima classe da direita com zeros para que tenha 3 algarismos, quando assim for necessario. A primeira classe da esquerda poderá ter mais de 3 algarismos. Lê-se depois o numero, ou classe por classe, juntando a cada uma a designação da unidade que ella representar,—ou como se fosse inteiro e juntando á ultima classe da direita o nome da unidade que lhe pertencer.*

Os multiplos do metro cubico são em geral pouco usados na pratica.

146. Na medição do volume ou cubagem das madeiras de construcção, lenhas, etc., usam-se tres unidades de volume chamadas *decastére, stére,* e *decistére*. O *stére* vale 1^{m3} ou 10 *decistéres;* o *decastére* vale 10 *steres* São tambem empregados, além d'estas medidas, o *meio decastére,* e o *duplo stére.*

O *Stére* compõe-se de um estrado ou soleira de madeira, da qual se destacam perpendicularmente dois prumos escorados, de mais de 1^{m} de altura, e distanciados de 1^{m}. N'estes prumos, onde se lê uma graduação em decimetros, centimetros e millimetros a partir da soleira para cima, escorrega um travessão de madeira com duas braçadeiras de ferro que os cingem, podendo fixar-se a qualquer altura por meio de parafusos de pressão com porca aberta nas braçadeiras.

O *meio decastére* e o *duplo stére,* constróem-se como o *stére,* differindo apenas em que os prumos do primeiro distam entre si 5^{m}, e os do segundo 2^{m}.

Com o *stére* podem resolver-se dois problemas: 1.° achar c volume de certa porção de madeira; 2.° dispor o travessão a uma altura que permitta medir-se um metro cubico, ou *stére,* de madeira.

Em ambos os casos é preciso que os toros, cuja medição se deseja, tenham todos egual comprimento.

Para resolver a primeira questão, isto é, para medir certa porção do madeira, começa-se por assentar por camadas horizontaes os paus sobre a soleira, tendo levantado o travessão, que depois se faz baixar sobre a madeira já assente. Lendo a altura a que o travessão ficou da soleira, e multiplicando essa altura pelo comprimento dos paus, o producto dará o volume da madeira. Exemplo: sendo o comprimento da madeira a medir $1^m,25$, e a altura do travessão sobre a soleira de $0^m,85$, o volume d'ella será: $1^m,25 \times 0^m,85 = 1^{st},0625$. Com o *duplo stére* ou o meio *decastére* tinha que multiplicar-se ainda este numero por 2 ou por 5.

O segundo problema resolve-se calculando a altura do travessão á soleira, fixando-o depois a essa altura por meio da parafusos, e pondo sobre a soleira os paus por camadas horizontaes até que a ultima camada superior rase a junta inferior do travessão. Exemplo: querendo obter um *stére* de madeira, cujo comprimento é de $2^m,32$, dividiremos 1 por $2^m,32$, o que dá $0^m,43$. Com o *duplo stére* ou o meio *decastére*, dividir-se-hia 2 ou 5, e não 1, pelo numero que marcasse o comprimento da madeira.

147. **Medidas de capacidade.**—A unidade principal d'estas medidas é o *Litro*, cuja capacidade é egual ao volume do decimetro cubico.

O litro juntamente com as demais medidas de capacidade fórma um complexo de medidas que procedem umas a respeito das outras de 10 em 10, isto é, cada uma vale 10 vezes mais do que a immediatamente inferior, e 10 vezes menos do que a immediamente superior.

148. D'estas medidas umas são multiplas, outras sub-multiplas do litro. Os seus nomes, notação e valores, são os seguintes:

Multiplos	*Myrialitro*	(1^{Ml})	vale	10000	litros	ou	10^{Kl}.
	Kilolitro	(1^{Kl})	»	1000	»	»	10^{Hl}.
	Hectolitro	(1^{Hl})	»	100	»	»	10^{Dl}.
	Decalitro	(1^{Dl})	»	10	»	»	10^{l}.
	Litro	(1^{l})	»	1	litro	»	10^{dl}.
Sub-multiplos	*Decilitro*	(1^{dl})	vale	0,1	»	»	10^{cl}.
	Centilitro	(1^{cl})	»	0,01	»	»	10^{ml}.
	Millilitro	(1^{ml})	»	0,001	»		

O metro cubico corresponde ao kilolitro, porque aquelle tem 1000 decimetros cubicos, e portanto 1000 vezes a capacidade de 1 litro. Ao centimetro cubico corresponde o millilitro. E' auctorizada por lei a adopção de medidas duplas e sub-duplas d'aquellas medidas.

Das medidas indicadas nem todas são empregadas na pratica para o mesmo fim. Para os cereaes, legumes, etc., empregam-se o *hectolitro, meio litro, hectolitro, duplo decalitro, de-*

calitro, meio decalitro, duplo litro, decilitro, meio decilitro. Para liquidos usam-se o *duplo litro*, o *litro*, o *meio litro*, o *duplo decilitro*, o *decilitro*, o *meio decilitro*, o *duplo centilitro*, e o *centilitro*.

149. Tendo presentes as convenções do n.º 147 e as regras da numeração decimal, facilmente se poderá ler e escrever qualquer numero referido a medidas de capacidade. Por exemplo, o numero composto de 327 *myrialitros*, 4 *kilolitros*, 7 *hectolitros*, 6 *decalitros*, 3 *litros*, 2 *centilitros* e 4 *mililitros*, escrever-se-ha referido ao litro como unidade, d'este modo: $3274763^{l},024$. Analogamente ao que fica dito para as outras medidas, e lembrando-nos de que estas procedem de 10 em 10, sem difficuldade leremos este numero, ou qualquer outro que se nos apresente.

Se não quizessemos o numero dado referido ao litro, mas a outra unidade maior ou menor do que elle, dividiriamos ou multiplicariamos o numero por uma potencia de 10 cujo expoente tenha tantas unidades quantas as que vão desde a actual, inclusive, até á nova exclusive. Por conseguinte, para referirmos o numero dado não ao litro mas ao myrialitro, por exemplo, dividiremos o numero $3274763^{l},024$ por 10000, e poremos a designação da nova unidade, assim: $327^{Ml},4763024$.

150. Como o litro é a capacidade do decimetro cubico, póde passar-se das medidas de capacidade para as de volume, ou vice-versa, *reduzindo a litros qualquer numero que se refira áquellas, substituindo a designação de litro pela de* **decimetro cubico**, *e depois procedendo pelo modo como fica dito para referir medidas de volume a qualquer unidade d'esta natureza; ou reduzindo qualquer numero de medidas de volume a* **decimetros cubicos**, *substituindo esta designação pela de litro, e procedendo depois com o numero assim preparado, como se ensinou no n.º 147.*

Exemplos. 1.º Reduzir $3429^{l},015$ ao *metro cubico* como unidade. Substituiremos a designação de *litro* pela de *decimetro cubico*, e teremos $3429^{dm3},015$; e, passando a virgula 3 casas para a esquerda, virá: $3^{m3},429015$.

2.º Reduzir $84672^{Hm3},027$ ao *decilitro* como unidade. Reduziremos primeiramente o numero dado a *decimetros cubicos*, passando a virgula 9 casas para a direita, o que dá 84672027000000^{dm3}. Mudaremos esta designação para a de litro: 84672027000000, e juntaremos mais um zero, pondo a designação nova. Teremos pois 846720270000000^{dl}, como se pedia.

151. **Medidas de peso.**—A unidade principal d'estas medi-

das é o *gramma*, isto é, *o peso d'um centimetro cubico de agua destillada á temperatura de 4°,1 centigrados.*

As medidas de peso procedem umas a respeito das outras de 10 em 10 como os de capacidade, e têem a seguinte notação e valores:

Multiplos

Tonelada metrica	(1 T)	vale	1000000	grammas	ou 10 Q
Quintal metrico	(1 Q)	»	100000	»	» 10Mg
Myriagramma	(1Mg)	»	10000	»	» 10Kg
Kilogramma	(1Kg)	»	1000	»	» 10Hg
Hectogramma	(1Hg)	»	100	»	» 10Dg
Decagramma	(1Dg)	»	10	»	» 10 g
Gramma	(1 g)	»	1	»	» 10 dg

Sub-multiplos

Decigramma	(1dg)	vale	0,1	gramma	ou 10cg
Centigramma	(1cg)	»	0,01	»	» 10mg
Milligramma	(1mg)	»	0,001	»	

Por ser o gramma peso excessivamente pequeno, tomou-se em geral como unidade o kilogramma, a que vulgarmente se chama por abreviatura *kilo*. Como o kilogramma vale 1000 grammas, e um gramma é o peso da agua contida n'um centimetro cubico, segue-se que o peso de um decimetro cubico de agua, nas circumstancias citadas acima, será de um kilo. Da mesma fórma se verá que um metro cubico pesa 1000 kilos ou uma tonelada metrica, etc.

O peso maior que se fabríca é de 50 kilos, porque para pesagens maiores emprega-se a balança decimal ou centesimal.

O *quilate*, peso muito pequeno usado pelos joalheiros para as pesagens de pedras, divide-se em 4 *grãos*, e é egual a 205mg,75.

152. A leitura, a representação escripta, e a mudança de uma para outra unidade, de qualquer numero referido a medidas de peso, executa-se facilimamente, tendo presentes os preceitos e regras dadas para as medidas de capacidade.

155. **Unidades de dinheiro, moedas.**—O *toque* ou *titulo* de uma liga-metallica, isto é, *da reunião de dois metaes pela fusão*, avalia-se pelo numero de *millesimos* de metal puro contido na liga. E' assim que se diz que uma liga tem 900 *millesimos* de toque para significar que em 1000 partes ha 900 de metal puro. Applicando isto ás moedas de oiro e de prata diremos

toque de uma moeda *é a relação existente entre o peso da prata fina ou de oiro puro da moeda e o peso total d'esta.*

O toque do oiro puro e da prata pura é portanto de 1000 millesimos.

A lei de 29 de julho de 1854 estabeleceu o toque legal para as nossas moedas de $916\frac{2}{3}$ e uma *tolerancia* de 2 millesimos para mais ou para menos para o toque. Para o peso, porêm, a tolerancia é de dois millesimos para as moedas de oiro, e de 3 para as de prata.

Os nomes, valores, diametros e pesos das nossas moedas de prata e oiro são os seguintes:

Nomes		Valores em réis	Diametros	Pesos legaes
Oiro.	Corôa.........	10$000	0m,030	17gr,735
	1/2 Corôa.......	5$000	0m,023	8gr,868
	1/5 Corôa......	2$000	0m,0185	3gr,547
	1/10 Corôa......	1$000	0m,014	1gr,774
Prata	Cinco tostões...	500	0m,030	12gr,500
	Dois tostões...	200	0m,023	5gr,000
	Um tostão.....	100	0m,0185	2gr,500
	1/2 tostão......	50	0m,014	1gr,250

Alêm d'estas moedas ha outras de cobre e bronze que são: *o vintem* (20 réis), *dez réis, cinco réis, tres réis, e o pataco* (40 réis).

Pela lei já citada tambem podem correr em Portugal e seus dominios outras moedas de oiro, cujos nomes, valores, diametros e pesos constam da tabella seguinte:

Nomes	Valores em réis	Diametro	Pesos
Peça....................	8$000	0m,031	14gr,188
Meia peça................	4$000	0m,025	7gr,094
Libra ou soberano..........	4$500	0m,022	7gr,981
1/2 libra ou 1/2 soberano.....	2$250	0m,019	3gr,990

154. Nos archipelagos dos Açores e da Madeira corre a

moeda do continente, mas com valor superior ao que n'este tem, chamando-se por isso *fraca*. A moeda dos Açores é 25 % e a da Madeira 10 % mais *fraca* do que no continente.

A unidade de dinheiro em Angola é a *macuta*. Tanto esta como o *mitiar* (1/2 macuta) são moedas de cobre cujo peso regula por 12 em arratel. A moeda de prata é de 2, 4, 6, 8, 10, e 12 *macutas*. Esta moeda, porêm, tende a ser substituida pouco a pouco pela do continente.

Na India o dinheiro conta-se por *xerafins (pardaus* ou *meias rupias), tangas* e *réis*. Ha moedas de cobre de 1 1/2 real *(roda)*, e de 3, de 4 1/2, de 6, 7 1/2, 9, 10, 12, 15, 20, 30, e 60 réis. A *meia rupia*, ou *xerafin*, é moeda de prata de 11 dinheiros, e vale 5 *tangas*. Ha tambem alêm do *xerafim*, outra moeda de prata, a *rupia* ou *pardau dobrado;* e as de oiro denominadas *S. Thomé*, e *meio S. Thomé*.

155. *Medidas circulares*.—Chama-se *circulo* á figura plana limitada por uma linha curva que goza da propriedade de ter todos os seus pontos equidistantes d'um ponto interior da figura chamada centro. A curva chama-se *circumferencia*.

A circumferencia, segundo o systema metrico decimal, divide-se em 4 partes eguaes, ou 4 *quadrantes;* cada quadrante em 100 partes chamadas *grados;* cada grado em 100 outras chamadas *minutos centesimaes*, e cada um d'estes em 100 *segundos centesimaes*.

A divisão antiga da circumferencia, chamada divisão *sexagesimal*, fazia-se, e ainda hoje se faz, porque se adopta de preferencia á centesimal, dividindo a circumferencia em 360 partes eguaes ou *graus*, o grau em 60 *minutos*, e o minuto em 60 *segundos*. A notação dos minutos e segundos faz-se d'este modo: 36′ (36 minutos); 43″ (43 segundos).

156. Para facilmente se reduzirem as antigas medidas portuguezas ás actuaes daremos a seguinte tabella:

Medidas de comprimento

Grau (60 milhas)	vale	111111,1	metros
Legua de 18 ao grau	»	6172,84	»
Legua de 20 ao grau ou maritima (3 milhas)	»	5555,55	»
Milha	»	1951,85	»
Toeza (6 pés)	»	1,9782	»
Pé (12 pollegadas)	»	0,3297	»
Pollegada (12 linhas)	»	0,0275	»
Linha (12 pontos)	»	0,0023	»

Braça (2 varas).................	vale	2,1980	metros
Vara (5 palmos).................	»	1,0990	»
Palmo (8 pollegadas)............	»	0,2198	»
Covado (3 terços ou 3 palmos avantajados......................	»	0,66	»
Terça (6 sesmas ou 8 oitavas).....	»	0,22	»

Medidas de superficie

Braça quadrada (4 varas quadradas).......	vale	4^{m2},831204
Vara quadrada (25 palmos quadrados).....	»	1^{m2},207801
Palmo quadrado (84 pollegadas quadradas).	»	0^{m2},048312
Pollegada quadrada.....................	»	0^{m2},000755

Medidas de capacidade para seccos

Moio (15 fangas)........................	vale	828	litros
Fanga (4 alqueires).....................	»	55,2	»
Alqueire (4 quartas)....................	»	13,8	»
Quarta (2 oitavas)......................	»	3,45	»
Oitava (2 maquias)......................	»	1,725	»
Maquia (2 selamins).....................	»	0,863	»
Selamin.................................	»	0,431	»

Medidas de capacidade para liquidos

Tonel (2 pipas).........................	vale	840	litros
Pipa (25 almudes).......................	»	420	»
Almude (2 potes ou 2 cantaros)..........	»	16,8	»
Pote ou cantaro (6 canadas).............	»	8,4	»
Canada (4 quartilhos)...................	»	1,4	»
Quartilho...............................	»	0,35	»

Medidas de peso

Tonelada ($13 \frac{1}{2}$ quintaes)....	vale	792,634	kilogrammas
Quintal (4 arrobas)..........	»	58,714	»
Arroba (32 arrateis).........	»	14,678	»
Arratel (2 marcos)..........	»	458,7	grammas
Libra (12 onças)............	»	229,35	»
Marco (8 onças).............	»	28,6687	»
Onça (8 oitavas ou 8 drachmas)	»	3,5836	»
Oitava (3 escropulos)........	»	1,1945	»
Grão........................	»	0,0498	»

Medidas para pesar pedras preciosas

Onça (8 oitavas ou 144 quilates)	vale	29,628	grammas
Oitava (3 escropulos)........	»	3,7035	»
Escropulo (6 quilates).......	»	1,2345	»
Quilate (4 grãos)...........	»	0,20575	»
Grão	»	0,05144	»

Toques do ouro

Quilate (4 grãos)............	vale	41,667	millesimos
Grão do quilate (8 oitavas)...	»	10,417	»
Oitava.....................	»	1,302	»

Toques da prata

Dinheiro (24 grãos)..........	vale	83,333	millesimos
Grão do dinheiro (4 quartas)	»	3,472	»
Quarta....................	»	0,868	»

Para os usos praticos da vida, convêm ter de memoria, por serem de uso mais frequente, as seguintes equivalencias:

1 vara $= 0^{m},11$; 1 alqueire $= 13^{l},8$; 1 almude $= 16^{l},8$; 1 arratel $= 0^{k},459$.

§ 18.º — Das proporções e da regra de tres

157. *Razão por quociente* ou *geometrica*, ou simplesmente *razão* entre duas quantidades, é o quociente dos numeros que as representam referidos á mesma unidade. Por exemplo, sendo as rações de um navio em numero de 16, sendo 32 os tripulantes, e pretendendo-se conhecer a *relação* ou razão entre essas duas quantidades, será ella $\frac{16}{32}$ ou $\frac{1}{2}$. Quer isto dizer que uma ração é para 2 tripulantes, ou meia ração por tripulante.

A egualdade entre duas razões tem o nome de *proporção*.

158. Duas quantidades são *directamente proporcionaes*, quando, *augmentando* ou *diminuindo* uma, a outra *augmentar* ou *diminuir* simultaneamente na mesma relação. Exemplo, uma barra de oiro valerá tanto mais quanto mais pesada for; tan-

to menos quanto menos peso tiver. Se um kilo tem um certo valor, 2 kilos terão o dobro, e $1/2$ kilo terá metade, etc. O *valor* e o *peso* são quantidades *directamente proporcionaes*.

Duas quantidades dizem-se *inversamente proporcionaes*, quando, tornando-se uma d'ellas 2, 3, 4, etc. vezes *maior* ou *menor*, a outra simultaneamente se torne 2, 3, 4, etc. vezes *menor* ou *maior*. Assim, se certo trabalho é executado por 1 operario em 2 dias, o mesmo trabalho será feito em um dia, se os operarios forem 2, trabalhando nas mesmas condições. O *numero de operarios* e o *tempo* são quantidades *inversamente proporcionaes*.

159. A razão de duas quantidades é, como se disse, o seu quociente, e este toma a designação de *expoente* de uma razão, quando se considera como indicador de sua grandeza. O 1.º termo de uma razão, ou o dividendo, chama-se *antecedente* da razão; o 2.º, ou o divisor, *consequente*. Em 3 : 4; temos que 3 é antecedente e 4 consequente.

Sendo proporção a egualdade entre duas razões, segue-se que, tendo duas razões eguaes, por exemplo 4 : 8 e 3 : 6, e egualando-as, virá 4 : 8 = 3 : 6. O signal = póde e usa substituir-se por : : que se lê *assim como*; e porque um quociente é egual a um quebrado (n.º 92), a proporção poderá escrever-se d'estes modos: $\frac{4}{8} = \frac{3}{6}$, ou 4 : 8 : : 3 : 6.

160. A propriedade fundamental das *proporções por quociente* é que *o producto dos meios é egual ao dos extremos*. Portanto, querendo conhecer-se o valor de qualquer *meio, far-se-ha o producto dos extremos e dividil-o-hemos pelo meio conhecido*, para obter o valor de qualquer *extremo, multiplicar-se-hão os meios e dividir-se-ha o seu producto pelo outro extremo*. Como as palavras mostram, *meios* da proporção são os termos intermedios, e *extremos* os termos exteriores. Assim na proporção 6 : 3 : : 8 : 4, 3 e 8 são *meios*, 6 e 4 são *extremos*. Pelo principio fundamental é $3 \times 8 = 6 \times 4$.

Se os meios ou os extremos fossem eguaes, a proporção dir-se-hia *continua*. Assim, as proporções 3 : 9 :: 9 : 27, ou 9 : 3 :: 27 : 9, são proporções continuas. Chama-se *alternar*, o trocar o logar dos meios; *inverter*, o passar para antecedentes das razões os consequentes, e vice-versa; *transpôr*, o passar para o primeiro logar a segunda razão, e vice-versa. Tomemos por exemplo a proporção 3 : 2 :: 6 : 4. *Alternando-a*, temos 3 : 6 :: 2 : 4; *invertendo-a*, vem 2 : 3 :: 4 : 6; *transpondo*, obtem-se 6 : 4 :: 3 : 2. Estas transformações em nada alteram o valor da proporção, porque sempre se mantem a propriedade fundamental supra-enunciada (n.º 160).

161. Chama-se *regra de tres simples* a questão em que entram *tres* quantidades conhecidas, e uma desconhecida cujo valor se pretende achar, duas de uma especie e duas de outra, e todas directa ou indirectamente proporcionaes.

Resolver uma *regra de tres* é calcular a quantidade desconhecida, a que se chama *incognita,* por meio das quantidades dadas.

Se as duas especies de quantidades são *directamente proporcionaes,* a regra de tres simples diz-se *directa;* quando as quantidades forem inversamente *proporcionaes,* a regra de tres simples será *inversa.*

Chama-se especie *principal* a especie que contêm as quantidades conhecidas, e especie *relativa* aquella a que pertencer a *incognita.*

162. Dos methodos empregados para a resolução das questões de regra de tres simples, exporemos sómente o das proporções, cujos fundamentos ou principios acima se ensinaram. Para isto daremos alguns exemplos.

Regra de tres directa.— Problema: *Se 3 kilos de certo metal custam 1$800 réis, quanto custarão 9 kilos do mesmo?*

Como se deprehende do enunciado do problema, as quantidades que n'elle figuram são directamente proporcionaes; porque quanto *maior* for a porção de metal, *maior* tambem será o seu custo. A especie *principal* comprehenderá por conseguinte as quantidades 3 kilogrammas, e 9 kilogrammas, e a *relativa* as quantidades 1$800 réis e x réis. Portanto, para estabelecer a proporção diremos: *uma quantidade principal está para a outra, assim como a relativa da 1.ª está para a da 2.ª*. Isto é, $3^k : 9^k :: 1\$800$ réis : x. E applicando a regra do n.º 160 teremos $x = \frac{1\$800 \times 9}{3}$, ou, effectuando as operações indicadas, $x = 5\$400$ réis.

Poderiamos tambem ter estabelecido a proporção d'esta forma: Se 3 kilogrammas de certo metal custam 1$800 réis, 9 kilogrammas quanto custarão? N'este caso, vinha $3 : 1\$800 :: 9 : x$; e portanto $x = \frac{1\$800 \times 9}{3} = 5?\$400$ réis.

Regra de tres inversa.— Problema: *Fazendo 4 operarios certa obra em 6 dias, quantos operarios serão precisos para a fazer em 3 dias?*

As duas especies de quantidades que entram n'esta questão são *inversamente proporcionaes*. Effectivamente, levando 4 operarios 6 dias a executar certo trabalho, é manifesto que, para que elle se conclua mais rapidamente, teremos de metter mais gente. Logo a especie principal — *tempo* — e a relativa — *operarios* — são *inversamente proporcionaes*. Por conseguinte a proporção que resolve o problema é *inversa*, e será $3^d : 6^d :: 4^{op} : x^{op}$, d'onde, em virtude da regra dada, se deduz: $x = \frac{4 \times 6}{3} = 8$. Isto é, são precisos 8 operarios; o que assim devia de ser, porque, sendo o numero de dias *metade* menor, o numero de operarios deve ser *duplo*.

163. *A regra de tres composta*, é uma questão em que entram mais de quatro quantidades, duas a duas da mesma especie, sendo uma quantidade desconhecida e as outras conhecidas, e uma das especies directa ou inversamente proporcional ás restantes.

Achar o valor da incognita é resolver a regra de tres.

Para resolvermos as questões de regra de tres composta servir-nos-hemos ainda das proporções, como se vae ver no seguinte problema.

Problema. *10 pedreiros trabalhando 8 horas por dia, construiram em 7 dias um muro de 20^m de comprido, por $0^m,50$ de largo, e 2^m de alto. Pergunta-se quantos dias serão precisos a 5 homens para construirem um muro de 30^m de comprimento, $1^m,75$ d'altura, e $0^m,45$ de largura, trabalhando 10 horas por dia?*

Disporemos os dados da questão em duas linhas horizontaes, tendo o cuidado de collocar na mesma columna vertical quantidades de egual especie, marcando um *D* por sobre as *directamente proporcionaes* á incognita, e um *I* sobre as que lhe forem *inversamente proporcionaes*, d'esta fórma:

I	I		D	D.	D
10 pedreiros	8 horas	7 dias	20 m. comp.	0,50 m. larg.	2 m. alt.
5	10	x	30	0,45	1,75

A especie *dias* a que pertence a incognita é a especie relativa. Para termos o valor de *x*, *egualaremos a incognita ao producto da relativa conhecida pelas quantidades da 2.ª linha que lhe forem directamente proporcionaes, e pelas inversamente proporcionaes da 1.ª, e dividiremos este producto pelo de todas as outras quantidades directa e inversamente proporcionaes que não intraram no 1.º producto.*

Para o exemplo dado, teremos:

$$x = 7 \times \frac{30 \times 0,45 \times 1,75 \times 10 \times 8}{20 \times 0,50 \times 2 \times 5 \times 10} = 1^d, 89.$$

§ 19.º — Da regra de juros simples

164. *Juro* é o premio que recebe o individuo que emprestou a outrem alguma quantia de dinheiro. A quantia emprestada chama-se *Capital* ou *principal*.

Taxa, preço ou *razão de juro* é o premio que vence o capital 100 durante cada unidade de tempo. A unidade de tempo geralmente adoptada é o anno commercial, de 360 dias. As expressões 5%, 6%, etc., que se lêem *5 por cento*, *6 por cento*, etc, indicam que a taxa é de 5 ou de 6.

Juro ao dinheiro é a quantia que vence o juro 1 na unidade de tempo. Se o juro ao dinheiro é 20, 20 vencerá 1 n'um anno, e portanto 20×5 ou 100 vencerá 1×5 ou 5 no mesmo tempo.

Juro *simples* é o que se paga no fim de cada unidade de tempo. O juro é *composto*, quando em vez de ser pago por cada unidade de tempo se vae accumulando ao capital primitivo para formar outro capital que vence novo juro, e assim successivamente.

165. *A regra de juro simples* é uma regra de tres que tem por fim achar uma das 4 quantidades, *juro, capital, taxa* e *tempo,* quando forem dadas as outras tres. Os preceitos dados para a regra de tres, applicam-se integralmente ás questões de juros, tendo presentes os seguintes principios: 1.º *Os juros são directamente proporcionaes aos capitaes quando os tempos que lhes correspondem são constantes.* 2.º *Os juros são directamente proporcionaes aos tempos quando os capitaes correspondentes a estes tempos são constantes.* 3.º *Os juros são directamente proporcionaes aos productos dos capitaes pelos tempos.*

166. Exemplos. 1.º *O capital 300$000 réis, a* 6 % *ao anno, que juro vence em 3 annos e 4 mezes?*

Em virtude dos principios expostos no n.º 165, ter-se-ha: $100 \times 12^{\text{mezes}} : 300\$000 \times 40^{\text{mezes}} :: 6 : x$. D'aqui tira-se

$$= \frac{6 \times 300\$000 \times 40}{100 \times 12} = 60\$000 \text{ réis.}$$

2.º *O capital 400$000 réis a 5 % ao anno, em que tempo produz 30$000?*

Diremos: $100 \times 1 : 400\$000 \times x :: 5 : 30\$000$. D'aqui deduz-se successivamente: $400\$000 \times x = \dfrac{100 \times 30\$}{5}$

$$x = \frac{100 \times 30\$000}{5 \times 400\$000} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2} = 1\,\frac{1}{2} \text{ annos.}$$

3.º *Se o capital 200\$000 réis produziu em 2 annos a quantia de 400\$000 réis, qual foi a taxa ou razão de juro?*

Estabeleceremos a proporção d'esta fórma:

$$100 : 200\$000 \times 2 : : x : 40\$000$$

D'onde: $x = \dfrac{100 \times 40\$000}{200\$000 \times 2} = \dfrac{40}{4} = 10$. A razão de juros foi pois de 10 % ao anno.

4º *Qual foi o capital que em 2 annos produziu 60\$000 a 6 % ao anno?*

A proporção é a seguinte: $100 \times 1 : x \times 2 : : 6 : 60\$000$.

D'onde vem: $2 \times x = \dfrac{60\$000 \times 100}{6}$; $x = \dfrac{6000\$000}{12}$ $= 500\$000$. O capital é pois 500\$000 réis.

167. Se chamarmos ao capital em geral *a*, ao juro d'este capital *J*, á taxa *r*, e as tempo *t*, teremos a seguinte formula geral: $J = \dfrac{A \times r \times t}{100}$, d'onde se deduzem as 3 formulas seguintes, que com aquella resolvem as differentes questões de juros simples, supra-exemplificadas: $A = \dfrac{100 \times J}{r \times s}$; $r = \dfrac{100 \times J}{A \times t}$; $t = \dfrac{100 \times J}{A \times r}$.

§ 20.º Da regra de descontos

168. *Desconto* é o juro pago no principio do tempo a que elle se refere. Portanto, *descontar* uma quantia, é adeantal-a, abatendo.lhe por esse facto uma certa parte denominada *desconto*.

169. Quando em certas transacções, em que uma das partes negociadores tem de dar á outra por troca de generos uma quantia de dinheiro, esta se substitue pela *obrigação escripta* de o fazer n'um praso futuro, o documento que contiver tal obrigação chama-se *letra*. Uma *letra* é por conseguinte um documento de divida que tem de satisfazer-se em certo dia, Este dia diz-se o do *vencimento*. A letra póde ser *de cambio*

ou *da terra*. Letra de cambio *é a carta pela qual uma pessoa pede ou manda a outra de localidade differente da sua, que pague a terceira pessoa, ou á ordem d'esta, uma somma de dinheiro que diz haver recebido ou espera receber de futuro*. Letra da terra *é a letra em que tanto a pessoa que dá a ordem, como a que a deve executar, são da mesma terra.*

O que assigna a letra chama-se *saccador;* a pessoa que deve cumprir a ordem de pagamento, *saccado;* a que recebe a letra do *saccador* em vez do dinheiro tem o nome de *tomador*. Se o *tomador* da letra faz com outro uma transacção analoga, emquanto ao pagamento, á que com elle fizera o *saccador*, tem de escrever no dorso ou costas da letra uma declaração n'esse sentido, chamada *endosso*. Assignado o *endosso*, o tomamador torna-se *endossante*, e o que recebe a letra n'estas condições *endossatario*. Quando o saccado acceita a obrigação de pagar a letra, chama-se *acceitante*. O ultimo *endossatario* é o *portador* da letra.

170. A regra de desconto tem por fim calcular a quantia que se deve abater no valor nominal de uma letra, quando o seu possuidor não quer esperar pelo dia do vencimento.

O desconto mais geralmente seguido é o *desconto por fóra*, calculado pela regra de juros simples, visto elle ser *o juro do capital ou valor exarado na letra correspondente ao tempo que falta para seu completo vencimento segundo a taxa de desconto convencionado.*

Daremos apenas um exemplo como applicação da regra de desconto, porque os problemas d'esta natureza, são meros problemas de juros simples, de que já tratámos no § antecedente.

Qual é o desconto que tem uma letra de 480$000 réis a 3 m/v (tres mezes de vista), á qual faltam 2 mezes de vencimento, suppondo que a taxa de desconto é de 6 %/0 ao anno?

Teremos a seguinte proporção:

$$100 \times 1 : 480\$000 \times \frac{2}{12} :: 6 : D, \text{ sendo } D \text{ o desconto.}$$

D'esta proporção tira-se: $D = \dfrac{6 \times \frac{2}{12} \times 480\$000}{100} = \dfrac{480\$000}{100}$ $= 4\$800$ réis.

171. Analoga á formula dada no n.º 167, temos a seguinte que nos dá o desconto de uma letra. Chamando ao desconto *D*, ao capital ou valor nominal da letra *L*, á taxa de desconto

r, e ao tempo que falta para o vencimento da letra, *t*, temos a formula:

$$D = \frac{L \times r \times t}{100}$$

§ 21.º — Da regra de compra e venda de fundos publicos, acções e obrigações de Bancos e Companhias.

172. Os governos ao contrahirem imprestimos podem criar duas especies de divida publica: *divida fluctuante* e *divida consolidada*.

Na *divida fluctuante*, o juro ou desconto e o capital são constantes, sendo o governo obrigado a pagar aos credores em prasos fixos as quantias imprestadas, se os credores não quizerem *reformar*, isto é, renovar os contractos, quando os primeiros prasos expiraram.

Na *divida consolidada*, é constante o juro que o governo paga pelo dinheiro que lhe imprestaram, variando o capital, e por conseguinte o juro effectivo correspondente ao dinheiro realmente recebido pelo thesouro. Este lucro constitue uma verdadeira *renda perpetua*, visto como o governo nunca póde ser obrigádo ao pagamento do capital em divida.

Os titulos representativos da divida fluctuante são *letras do thesouro*, de ordinario a 3 ^{m}/v, garantidas muitas vezes por penhores, como *titulos de divida consolidada (inscripções)*, que ou se entregam aos credores, ou se depositam no Banco de Portugal. N'este caso os credores recebem uns documentos escriptos, ou *cautelas*, com que podem resgatar os penhores, se por ventura o governo em epocha propria se não solver dos seus compromissos.

A divida consolidada póde ser *interna* e *externa*. Os titulos representativos da primeira dizem-se *inscripções;* os da segunda, *bonds*.

As inscripções podem ser de *coupons* ou de *assentamento*. As primeiras são titulos *ao portador*, isto é, de juros pagaveis pela *Junta do Credito Publico* á pessoa que apresentar em epocha previamente annunciada o *coupon* (que é uma tirinha de papel cortada do proprio titulo que para essse fim tem disposição especial).

As *inscripções de coupons* podem ser de 100$000 réis, de 500$000 réis, e de 1:000$000 réis, nominaes.

As *inscripções de assentamento* são titulos *nominativos*, e portanto pagaveis pela Junta do Credito Publico sómente a quem, segundo os averbamentos dos mesmos titulos feitos pela Junta, elles pertencerem. As *inscripções de assentamento* podem alienar-se observando os seguintes preceitos: 1.º assignando o antigo possuidor o seu nome na inscripção, e reconhecendo-o pelo tabellião; 2.º declarando na inscripção o nome da pessoa a quem ella vai pertencer, e fazendo averbar na Junta essa declaração.

Ha *inscripções de assentamento* de 100$000 réis, de 500$000 réis, e de 1, 5, 10, 15, e 20 contos de réis nominaes.

Além d'estes titulos, ainda a Junta póde passar *certificados* por troca de qualquer quantia d'inscripções, ou *certificados* de 50$000 réis nominaes, para trocar por *cautelas de minimos*, quando a importancia d'estas seja de 50$000 réis nominaes.

Os *bonds*, são de 100, 200, e 500 libras, e todos ao portador.

O juro que entre nós vencem todos os titulos de divida publica é de 3 $^0/_0$ do valor nominal em cada anno, e é pago aos semestres. O preço das *inscripções* e dos *bonds* exprime-se dizendo quanto custam 100 réis ou 100 dinheiros esterlinos nominaes.

Os *corretores de cambios e fundos publicos* publicam em certos periodos de tempo a nota dos preços por que os fundos se venderam no mercado *(Bolsa)*, nota que tem o nome de *Boletim dos preços correntes de fundos publicos*, geralmente de tres columnas com as epigraphes: *papel, dinheiro, effectuado*. A primeira columna incerra os preços pedidos por parte dos vendedores, a segunda os de offerta por parte dos compradores, a terceira os preços por que finalmente se realizaram as transacções.

173. Para que facilmente se resolvam as questões mais vulgares respeitantes á compra e venda de fundos publicos, daremos alguns problemas, cuja solução se baseia na *Regra de tres:*

1.º Problema. *Estando as inscripções a 46,18, que capital se póde comprar com 3:800$000 réis em dinheiro?*

Se com 46,18 réis se compram 100 réis nominaes *d'inscripções*, com 3:800$000 réis compraremos x. Logo temos:

$$46{,}18 : 100 :: 3800000 : x$$

e effectuando $x = \dfrac{3800000 \times 100}{46{,}18} = 8{:}228\$670$ réis.

Isto é, com 3:800$000 réis em dinheiro podemos comprar o capital nominal de 8:228$670 réis. Ou, o que é o mesmo: 8 inscripções de 1 conto, 2 de 100$000. Os 28$670 podem ser representados em *cautelas de minimos,* vencendo juros simplesmente quando perfizerem com outras a quantia de 50$000.

2.º Problema. *Estando as inscripções a 46,18, qual será o preço por que se tem de comprar 8:200$000 nominaes?*

A proporção é a seguinte:

$$100 : 46,18 : : 8200000 : x$$

$$\text{d'onde } x = \frac{8200000 \times 46,18}{100} = 3:786\$760 \text{ réis}$$

3.º Problema. *O possuidor de 10:600$000 de coupons que juro receberá semestralmente?*

Como o juro pago pelo governo é de 3 $^0/_0$ ao anno, ou 1 $^1/_2$ $^0/_0$ ao semestre, segue-se que devemos estabelecer a seguinte proporção:

$$100 : 1,5 : : 10600000 : x$$

$$\text{d'onde } x = 159\$000 \text{ réis}$$

4.º Problema. *Por que preço devem estar as inscripções para que o seu juro effectivo se eleve a 6,4 $^0/_0$ ao anno?*

Porque 100 réis nominaes vencem annualmente 3 réis em dinheiro, é claro que se for x o numero de réis em dinheiro em que importam os 100 réis nominaes, será 3 réis em dinheiro o juro de x réis tambem em dinheiro. Em vista d'isto e dos dados do problema, teremos:

$$6,4 : 100 : : 3 : x$$

$$\text{d'onde } x = 46,875$$

5.º Problema. *Sendo 47 $^4/_5$ o preço das inscripções, que rendimento se obtêm empregando 5:736$000 n'aquelles titulos?*

A proporção é esta:

$$47\frac{4}{5} : 3 : : 5736000 : x$$

$$\text{d'onde } x = 360\$000 \text{ réis.}$$

174. As *acções de Bancos e de Companhias,* são titulos que representam certo valor nominal, a que corresponde valor effectivo maior ou menor no mercado, segundo as circumstancias.

Se n'estes titulos o valor effectivo ou real egualar o valor nominal ou a parte d'este valor já desimbolsada, dir-se-hão ao par; se o valor real exceder o nominal ou a quantia desimbolsada pelos accionistas, dir-se-hão *acima do par*, sendo o excesso d'aquelle valor sobre este o *premio*. Se o valor effectivo fôr inferior ao nominal ou, em geral, á parte desimbolsada, os titulos dizem-se *abaixo do par*.

O juro das *acções* chama-se *dividendo*.

175. Além das *acções*, possuem algumas Companhias outra especie de titulos chamados *obrigações*, que á similhança das *acções* e *inscripções*, têem valor nominal constante e valor real variavel. Distinguem-se das *acções* em terem juro constante; e distinguem-se d'estas e das *inscripções*, em serem *amortizadas* — isto é, em serem seus possuidores imbolsados em determinadas epochas do valor nominal das mesmas obrigações, seja qual fôr o preço do custo, deixando todavia de vencer juros desde a amortização.

As *obrigações prediaes*, isto é, as obrigações creadas pela *Companhia geral do credito predial portuguez*, podem ser *nominativas* ou ao portador, e têem de valor nominal 90$000 réis (500 francos ou 20 libras esterlinas). Ha titulos de 5 e de 10 *obrigações* e *fracções de obrigação*, ou *quintos de obrigação*, de 18$000 réis (100 francos ou 4 libras esterlinas) nominaes.

Os imprestimos feitos pela dita *Companhia* são-no em *obrigações prediaes ao par*, vencendo umas 6, outras 5 $^0/_0$ de juro annual.

176. Resolveremos alguns problemas sobre as acções e obrigações de Bancos.

1.º Problema. *Qual foi o rendimento do accionista de um Banco, que possuia 3:500$000 réis nominaes em acções, tendo sido o dividendo de 6,5 $^0/_0$?*

A proporção 100 : 6,5 :: 3500000 : x
dá x = 227$000 réis.

2.º Problema. *Se um titulo de 5 acções do Banco de Portugal custa 584$000 réis, quantas acções se poderão comprar com 4:569$800 réis?*

A proporção 584$000 : 500$000 :: 4569$800 : x
dá x = 3 : 912$500 réis.

Significa isto que com 4:569$800 em dinheiro se podem comprar 7 *titulos de 5 acções* e mais 4 *acções*, ou 3:900$000 réis nominaes.

Se quizessemos calcular a quantia em dinheiro que sobeja, calculariamos o custo de 3:900$000 réis nominaes, o que é dado pela proporção:

500$000 : 584$000 :: 3900$000 : y

d'onde: y = 4:555$200 réis

que, diminuido de 4:569$800, dá para demasia 14$600 réis.

3.º Problema. *Estando as obrigações prediaes de 6% a 92$500 réis, quanto póde realisar quem recebeu 25 obrigações e 2 fracções pela hypotheca de certa propriedade na Companhia geral de credito predial portuguez?*

Tendo cada obrigação de valor nominal 90$000 réis, e cada fracção de obrigação 18$000 réis, as 25 obrigações e 2 fracções montarão ao valor nominal de 2:286$000 réis. Sabendo-se que cada obrigação se vende por 92$500 réis, é claro que sendo *x* o producto da venda das *obrigações* e *fracções* de obrigação, será

90$000 : 92$500 :: 2:286$000 : x

e portanto x = 2:349$500 réis

4.º Problema. *Com 3:000$000 réis quantas obrigações se podem comprar, suppondo que ellas têem 3 % de premio?*

Sendo 3 % o premio, cada 100 réis nominaes de obrigação importarão em 103 réis em dinheiro; logo da proporção

103 : 100 :: 3:000$000 : x

se deduz x = 2:912$621 réis nominaes

Dividindo 2:912$591 réis por 90$000 réis, acha-se o numero de 32 *obrigações prediaes;* e, multiplicando o resto por 5 e dividindo o producto por 90$000 réis, acham-se os quintos ou fracções de obrigação que a mais se podem comprar.

Portanto, com 3:000$000 em dinheiro podem comprar-se 6 *titulos de 5 obrigações,* 2 *obrigações* e 1 *fracção de obrigação,* ou 3 *titulos de 10 obrigações,* 2 *obrigações* e 1 *fracção,* ficando ainda um saldo em dinheiro de 15$060 réis.

§ 22 — Da Regra de Companhia

177. A regra de companhia ensina a dividir os lucros ou perdas de uma sociedade pelos socios.

Esta divisão baseia-se nos seguintes principios: 1.º Os lucros ou as perdas são directamente proporcionaes aos capitaes com que os socios contribuiram, quando os tempos são eguaes; 2.º Os lucros ou perdas são directamente proporcionaes aos productos das intradas pelos tempos; 3.º Os lucros ou perdas são directamente proporcionaes aos tempos quando as intradas são eguaes.

D'estes tres principios dimana a *Regra de Companhia.*

178. Para resolver qualquer questão d'esta natureza, re-

correremos ao que ficou preceituado para a regra de tres, de que a regra de companhia é simples applicação.

A regra de companhia póde ser *simples* ou *composta*. E' *simples* quando as intradas dos socios, ou os tempos em que essas intradas estiverem empregadas, são eguaes; diz-se *composta* quando nem tempos nem intradas o são.

Na regra de companhia *simples*, o lucro ou perda total de uma sociedade divide-se pelos socios proporcionalmente aos tempos, se as intradas forem eguaes, e ás intradas quando forem eguaes os tempos. Na regra de companhia *composta*, o lucro ou perda total da sociedade divide-se pelos socios proporcionalmente aos productos das intradas pelos tempos.

D'aqui as seguintes regras:

1.ª Na regra de companhia simples, *a somma das intradas dos socios está para o lucro ou perda da sociedade, assim como a intrada de qualquer socio para a parte do lucro ou perda que lhe cabe, no caso dos tempos serem eguaes;* ou, *a somma das intradas está para o lucro ou perda a dividir, assim como o lucro ou perda de cada socio para o lucro ou perda que lhe pertencer, no caso dos tempos serem eguaes.*

2.ª Na regra de companhia composta, *a somma dos productos das intradas dos socios pelos tempos respectivos está para o lucro ou perda da sociedade, assim como o producto da intrada de qualquer socio pelo seu tempo está para o lucro ou perda que lhe pertencer.* Exemplos vão esclarecer esta doutrina.

179. 1.º *Havendo-se associado 3 individuos durante o mesmo tempo para uma empresa, e contribuindo o 1.º com 36 contos, o 2.º com 45, e o 3.º com 27, e tendo havido o prejuizo de 18 contos, pergunta-se qual foi o prejuizo de cada um.*

Do que fica dito no n.º 178 se deprehende ser esta questão uma das de regra de companhia simples, e portanto resoluvel pela seguinte proporção:

$$(36+45+27) : 18 :: 36 : x :: 45 : y :: 27 : z$$

o que dá, effectuando as operações: x = 6:000$000 réis; y = 7:500$000 réis; z = 4:500$000 réis.

2.º *Tres pessoas formaram uma sociedade intrando todas com a mesma quantia de 4:500$000 réis, a 1.ª por um anno, a 2.ª por dois, e a 3.ª por tres. Tendo havido de ganho 9:000$000 réis, pergunta-se quanto coube a cada um.*

E' uma questão de regra de companhia simples, e que se resolve pela seguinte proporção:

$$(1+2+3) : 9000000 :: 1 : x :: 2 : y :: 3 : z$$

d'onde se tiram, depois de effectuadas as operações, os valores seguintes: x = 1:500$000 réis; y = 3:000$000; e z = 4:500$000 réis.

3.º *Formou-se uma sociedade de tres individuos. O 1.º introu com 250$000 réis por 7 mezes, o 2.º com 320$000 réis por 6 mezes, e o 3.º com 450$000 réis por 2 mezes. Como a sociedade ganhou 380$000 réis, pergunta-se quanto cabe a cada um.*

E' uma questão de regra de companhia composta que se resolve pela seguinte proporção:

$$(250\$000 \times 7 + 320\$000 \times 6 + 450\$000 \times 2) : 380\$000$$
$$: : 250\$000 \times 7 : x : : 320\$000 \times 6 : y : : 450\$000 \times 2 : z$$

d'onde se tiram, effectuando as operações indicadas, os seguintes valores: x = 145$515 rs.; y = 159$650 rs.; z = 74$835 rs.

§ 23.º — Da regra de liga directa

180. A regra de liga directa, ou regra de mistura, ensina a calcular o preço da mistura de varias substancias, sendo conhecido o numero de unidades de cada substancia e o seu preço,—ou a calcular o titulo de uma porção de oiro ou prata que resultou da mistura de porções de prata ou oiro, cujos pesos e titulos são dados.

Exemplo. 1.º Misturaram-se vinhos de tres qualidades, a saber 60^l de 180 réis, 36^l de 160 réis, e 48_l de 150 réis. Pergunta-se a como póde vender-se o litro da mistura.

60	litros	a 180	réis	valem	60 × 180	ou	10$800
36	»	» 160	»	»	36 × 160	»	5$760
48	»	» 150	»	»	48 × 150	»	7$200
144							23$760.

D'aqui se conclue que se 144 litros valem 23$760, 1 litro valerá 144 vezes menos, isto é, $\frac{23\$760}{144} = 165$ réis. O preço de 1 litro é, pois, de 165 réis.

Analogamente se resolveriam outros exemplos.

FIM